

Parameterschätzung für elastisch-plastische Deformationsgesetze bei Berücksichtigung lokaler und globaler Vergleichsgrößen

Von der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der
Technischen Universität Chemnitz
genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur
(Dr.-Ing.)

von Dipl.-Math. Ulrich Benedix
geboren am 14. Juni 1951 in Chemnitz

eingereicht am 15. November 1999

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Kreißig
Prof. Dr. rer. nat. F. Tröltzsch
PD Dr.-Ing. habil., M. Sc. R. Mahnken

Tag der Verteidigung: 19. Mai 2000

Benedix, Ulrich

Parameterschätzung für elastisch-plastische Deformationsgesetze bei Berücksichtigung lokaler und globaler Vergleichsgrößen

Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Mechanik, 2000

89 Seiten

34 Abbildungen

22 Tabellen

75 Literaturzitate

Referat:

Der Begriff "Parameteridentifikation" bedeutet die Berechnung von Parametern eines (i. a. nichtlinearen) Modells eines physikalischen Prozesses durch Minimierung eines Fehlerquadratfunktionals aus gemessenen und mit Hilfe des Modells berechneten Vergleichswerten. Unter einer "Parameterschätzung" wird zusätzlich die Bestimmung von Konfidenzintervallen der optimalen Parameter und von Korrelationskoeffizienten der Parameter untereinander verstanden.

In der vorliegenden Untersuchung wurde eine Parameterschätzung am Beispiel elastisch-plastischer Deformationsgesetze für kleine Verzerrungen vorgenommen, wobei als experimentelle Vergleichswerte sowohl lokale Größen (Spannungen) als auch globale Größen (Biegemoment und Längskraft) zur Verfügung standen.

Die Integration des nichtlinearen Deformationsgesetzes erfolgte mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens. Die Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung der für die anschließende Optimierung benötigten Ableitungen der Vergleichsgrößen nach den Parametern ist eingebettet in den Integrationsalgorithmus. Zur Optimierung der Zielfunktion wurde das Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendet.

Anhand von Berechnungsergebnissen für unterschiedliche Modellfunktionen bei Einbeziehung verschiedenartiger Versuche werden Beispiele für erfolgreiche Parameterschätzungen sowie für das Auftreten systematischer Fehler und überparametrisierter Modelle angegeben.

Schlagworte:

Parameteridentifikation - Parameterschätzung - Methode der kleinsten Quadrate - Sensitivitätsanalyse - Plastizitätstheorie - Verfestigung - Anisotropie

Vorwort

Die vorliegende Dissertationsschrift entstand innerhalb meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur Festkörpermechanik des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Chemnitz.

Besonders möchte ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr.-Ing. Kreißig, für die Anregung und weitere fruchtbare Förderung in der Bearbeitung des Themas danken. Dieser Dank schließt selbstverständlich die Mitarbeiter der Professur Festkörpermechanik ein, die durch ihre kollegiale Zusammenarbeit ebenfalls zum positiven Ergebnis beigetragen haben. Insbesondere bin ich Herrn Dr. Görke, den ehemaligen Kollegen Dr. Bohnsack und Dr. Kretzschmar sowie Herrn Dr. Michael für die Überlassung von Quelltexten zu Dank verpflichtet.

Speziellen Dank schulde ich weiterhin Herrn Prof. Dr.-Ing. Naumann und seinen Mitarbeitern Frau Dr. Bormann und Herrn Pelz von der Professur Experimentelle Mechanik für die häufig diffizile Durchführung und Auswertung der Experimente.

Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. Tröltzsch von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz und Herrn PD Dr.-Ing. habil., M. Sc. Mahnken von der Firma ABB Power Generation Ltd Baden/Schweiz für ihr Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft, Gutachten zu übernehmen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Deformationsgesetz für kleine elastisch-plastische Verzerrungen	9
2.1	Fließbedingung	10
2.2	Fließregel	11
2.3	Spannungs-Verzerrungs-Beziehung	12
2.4	Entwicklungsgleichungen	13
2.5	Materialmodell	14
3	Experimentelle Ergebnisse	17
3.1	Materialauswahl	18
3.2	Zugversuche	18
3.3	Biegeversuche an geraden Proben	19
3.4	Biegeversuche an gekerbten Proben	23
4	Berechnungsmodell zur Parameteridentifikation	29
4.1	Lokale Integration des Deformationsgesetzes	29
4.2	Gestaltung der Zielfunktion	31
4.3	Optimierungsverfahren	33
4.4	Sensitivitätsanalyse	38
4.5	Parameterschätzung	41
4.6	Multikriterielle Zielfunktionen	47
5	Ergebnisse der Parameteridentifikation	49
5.1	Anfangs-Fließortkurve	49
5.2	Synthetische Meßwerte	56
5.3	Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe	58
5.3.1	Berücksichtigung aller Lastschritte	59
5.3.2	Selektion der Lastschritte mit systematischen Fehlern	60

5.3.3	Vergleich der Ansätze für die isotrope Verfestigung	62
5.4	Ergebnisse für den Zugversuch	67
5.5	Kombination gekerbte Biegeprobe und Zugversuch	71
5.5.1	Multikriterielle Optimierung für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe und den Zugversuch	71
5.5.2	Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Ansätze	75
5.6	Gerade Biegeprobe	77
6	Zusammenfassung	81

Kapitel 1

Einleitung

Ausgereifte numerische Verfahren wie die Finite Elemente Methode erlauben dank ihrer breiten theoretischen Grundlagen und leistungsfähiger Computertechnik die Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Aufgabenstellungen der Ingenieurwissenschaften. Zuverlässige Resultate der numerischen Simulation werden jedoch nur bei ausreichender Kenntnis der in den Materialgleichungen auftretenden Parameter erhalten.

Die Bestimmung oder *Identifikation* von Materialparametern erfolgt im allgemeinen durch Minimierung eines Fehlerquadratfunktionals, welches Differenzen von Meßwerten und zugehörigen numerisch berechneten, von den Parametern abhängigen Vergleichswerten enthält.

Untersuchungen zur Parameteridentifikation für inelastische Deformationsgesetze sind z. B. in [2, 31, 32, 50, 53, 55, 68, 71, 72] enthalten. An der Professur Festkörpermechanik der TU Chemnitz wurden ebenfalls Forschungsarbeiten zur Identifikation von Materialparametern aus den an einer gekerbten Biegeprobe gemessenen Verschiebungsfeldern durchgeführt [16, 36, 47]. Hierbei wurden die numerischen Werte der Verschiebungen mit Hilfe des FEM-Programms "PMEP" [56] berechnet. Da in jedem Optimierungsschritt das vollständige Anfangs-Randwert-Problem zu lösen ist, ergaben sich trotz der Verwendung eines Parallelrechners lange Rechenzeiten.

Ergänzend dazu wird deshalb der Gedanke verfolgt, die Materialparameter aus einer vereinfachten Berechnung zu gewinnen, siehe auch [46]. Da die Belastungsgeschichte einzelner materieller Punkte der gekerbten Biegeprobe in Form der lastschrittweise gemessenen Verzerrungen bekannt ist, kann die Integration des Deformationsgesetzes punktweise erfolgen. Die auf diese Weise berechneten Spannungen lassen sich anschließend durch numerische Integration zu globalen Vergleichsgrößen wie Biegemoment und Längskraft zusammenfassen.

Im Kapitel 2 werden die mechanischen Grundlagen der Elasto-Plastizität und das Deformationsgesetz bei Voraussetzung kleiner Verzerrungen beschrieben. Weiterhin werden verschiedene Ansätze zur Beschreibung isotroper, kinematischer und formativer Verfestigung angegeben und diskutiert.

Kapitel 3 enthält eine Schilderung der zur Parameteridentifikation herangezogenen Versuche. Als experimentelle Resultate stehen Spannungs-Dehnungs-Kurven aus Zugversuchen und Biegeversuchen an geraden Proben sowie die lastschrittweise auftretenden

Verzerrungen für eine gewisse Anzahl materieller Punkte des Ligaments einer gekerbten Biegeprobe und die Werte der zugehörigen Schnittreaktionen Biegemoment und Längskraft zur Verfügung. Gegenstand der experimentellen Untersuchungen war ein Walzblech, dessen Materialverhalten als isotrop-elastisch, jedoch orthotrop-plastisch modelliert werden kann.

Die mathematischen Grundlagen werden im Kapitel 4 zusammengefaßt. Hierzu zählen der Integrationsprozeß für die punktweise Integration des Deformationsgesetzes, ein Optimierungsverfahren zur Bestimmung des optimalen Parametersatzes und die zur Optimierung benötigte Sensitivitätsanalyse. Des weiteren werden verschiedene Möglichkeiten zur Gestaltung der Zielfunktion diskutiert.

Erste Erfahrungen aus der Optimierung des Fehlerquadratminimum-Funktionalen ergaben, daß die Parameteridentifikation nicht als ein Werkzeug zur alleinigen Bestimmung eines fixierten Parametersatzes interpretiert werden sollte. Im allgemeinen weist die Zielfunktion mehr oder weniger ausgedehnte Minimalbereiche mit nahezu gleichen Funktionswerten auf. Diese können als Vertrauens- oder Konfidenzbereiche der optimalen Parameter interpretiert werden. Die Minimalbereiche können auch in Form von langen und schmalen Tälern auftreten, so daß von Korrelationen zwischen den einzelnen optimalen Parameterwerten auszugehen ist. Als *Parameterschätzung* wird die Berechnung des optimalen Parametersatzes unter Berücksichtigung des stochastischen Charakters der Meßwerte bezeichnet, so daß die gleichzeitige Bestimmung der Konfidenzbereiche und Korrelationskoeffizienten möglich ist.

Werden unterschiedliche Merkmale bzw. Versuche zur Parameteridentifikation herangezogen, ist die Konstruktion einer multikriteriellen Zielfunktion erforderlich. Hierfür werden verschiedene Möglichkeiten angegeben und erprobt.

Die ausgewählten numerischen Algorithmen wurden in einem FORTRAN-Programm "parid" zusammengefaßt, wobei teilweise Quellen aus [16, 47, 56] Verwendung fanden.

Im Kapitel 5 erfolgt die Beschreibung der erhaltenen Ergebnisse. Die Bestimmung der Anfangs-Fließortkurve und damit der Anfangswerte der inneren Variablen erfolgt mit Hilfe einer linearen Approximation. Berechnungen zur Reidentifikation von Verfestigungsparametern unter Zugrundelegung synthetischer Meßwerte dienen der Überprüfung der Programme. Bei der Identifikation der Verfestigungsparameter aus realen Meßwerten werden die Versuchsergebnisse der Experimente einzeln oder in Kombination miteinander ausgewertet. Weiterhin werden die Resultate für unterschiedliche Verfestigungsansätze verglichen.

Kapitel 2

Deformationsgesetz für kleine elastisch-plastische Verzerrungen

Hinsichtlich des Deformationsverhaltens von Festkörpern wird *elastisches* und *inelastisches* Materialverhalten unterschieden.

Elastische Verzerrungen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie nach einer Entlastung wieder vollständig verschwinden. Art und Größe der aufgebrachten Belastung bestimmen eindeutig Art und Größe der auftretenden Verzerrungen. Ein elastisches Material besitzt einen natürlichen spannungsfreien Zustand, und zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand besteht im isothermen Fall ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang [7, 57].

Davon abweichendes Materialverhalten wird unter dem Begriff *inelastisch* zusammengefaßt. Dazu zählen *plastisches* Verhalten, welches durch Gleitvorgänge sowie die Wirkungen von Versetzungen und Defekten in kristallinen Körpern hervorgerufen wird (näheres siehe z. B. [2, 53, 72]) sowie *viskoelastisches* und *viskoplastisches* Verhalten, welche durch Relaxations- bzw. Kriechvorgänge gekennzeichnet sind.

Die hier untersuchten elastisch-plastischen Deformationen sind charakteristisch für kristalline Werkstoffe, insbesondere Metalle. Während der elastische Deformationsanteil in einer reversiblen Verzerrung der Kristallstruktur besteht, wird der plastische Anteil durch Gleitbewegungen erzeugt. Im Gegensatz zu elastischen gehen daher plastische Formänderungen praktisch ohne Volumenänderung vor sich [7, 57]. Ein weiteres Kennzeichen der plastischen Verformungen ist ihre Irreversibilität, sie sind bleibend und dissipativ. Damit einhergehend sind der Spannungs- und der Verzerrungszustand von der Art und Weise der Belastung, also der *Belastungsgeschichte* bzw. dem *Lastpfad*, abhängig. Plastische Deformationen sind weiterhin *skleronom*, d. h., die Verzerrungsänderung stellt sich gleichzeitig mit der Laständerung ein [34, 44].

Wird zur Beschreibung des *elastisch-plastischen Materialverhaltens* von der Fließtheorie ausgegangen, kennzeichnen neben den elastischen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen drei weitere Eigenschaften das Materialverhalten:

- Die *Fließbedingung* (s. Abschnitt 2.1), durch welche für einen mehrachsigen Spannungszustand festgelegt wird, ob sich dieser an der Fließgrenze befindet.
- Die *Fließregel* (s. Abschnitt 2.2), welche die plastischen Verzerrungsinkremente mit den augenblicklichen Spannungen verknüpft.

- Ein oder mehrere *Verfestigungsgesetze* (s. Abschnitt 2.4), die beschreiben, auf welche Weise die Fließbedingung während des plastischen Fließens modifiziert wird.

Für Fließbedingung, Fließregel und Verfestigungsgesetze existieren eine Vielzahl von Ansätzen, welche im folgenden, soweit sie für die vorliegende Arbeit von Interesse sind, beschrieben werden.

2.1 Fließbedingung

Zur Beschreibung der Fließgrenze bei mehrachsiger Beanspruchung wird eine skalarwertige Fließfunktion F derart eingeführt, daß für Spannungszustände im Inneren des Fließkörpers

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{p}) < 0 \quad (2.1)$$

und für Spannungszustände auf der Fließfläche

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (2.2)$$

gilt [44]. Die Fließfunktion F kann sowohl vom Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, von den skalar- oder tensorwertigen inneren Variablen $\boldsymbol{\kappa}$ und über deren Entwicklungsgleichungen von gewissen Verfestigungsparametern \boldsymbol{p} abhängen.

Fließbedingungen für *anisotropes* Materialverhalten können einerseits über gemischte Invarianten des Spannungstensors bzw. -deviators und von Strukturtenoren konstruiert werden [14, 15], andererseits ist ein polynomialer Ansatz der Form

$$F = K_0 + K_{ij} \sigma_{ij} + K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + K_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \dots = 0 \quad (2.3)$$

möglich [6, 13, 48, 65]. Wird die Unabhängigkeit des plastischen Fließens von einem allseitig gleichen, also *hydrostatischen* Zug oder Druck, vorausgesetzt, ist es ausreichend, statt des Spannungstensors den *Spannungsdeviator* \boldsymbol{s} mit

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

zu verwenden. Bei Beschränkung auf eine quadratische Fließbedingung

$$F = K_0 + K_{ij} \sigma_{ij} + K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = 0 \quad (2.5)$$

kann die äquivalente Formulierung nach *Baltov* und *Sawczuk* [8], siehe auch [44], verwendet werden:

$$F = (s_{ij} - \alpha_{ij}) N_{ijkl} (s_{kl} - \alpha_{kl}) - \sigma_F^2(\varepsilon_v^{pl}) = 0 \quad (2.6)$$

Die hierin auftretenden inneren Variablen (vgl. Abschnitt 2.4) sind die plastische Vergleichsdehnung ε_v^{pl} , der Rückspannungstensor $\boldsymbol{\alpha}$ mit den Koordinaten α_{ij} und der vierstufige Distorsionstensor \boldsymbol{N} mit den Koordinaten N_{ijkl} .

Für die Koordinaten des Rückspannungstensors α und des Distorsionstensors N gelten [44] die *Symmetriebedingungen*

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (2.7)$$

bzw.

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{jilk} = N_{klij} \quad (2.8)$$

sowie bei Voraussetzung inkompressibler plastischer Verzerrungen die Bedingungen

$$\alpha_{ii} = 0 \quad (2.9)$$

bzw.

$$N_{iikl} = N_{ijkk} = 0 \quad (2.10)$$

Werden in (2.6) die Rückspannungen Null gesetzt, ergibt sich für den Sonderfall orthotropen Materialverhaltens die Fließbedingung nach *Hill* [42]:

$$\begin{aligned} F(\sigma) = & H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\ & + 2(N\sigma_{12}^2 + L\sigma_{23}^2 + M\sigma_{13}^2) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wenn in (2.6) der Distorsionstensor als isotroper Tensor gewählt wird und die Rückspannungen beibehalten werden, entsteht:

$$F = \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \sigma_F^2(\varepsilon_v^{pl}) = 0 \quad (2.12)$$

Gl. (2.12) wird manchmal auch als Fließbedingung nach *Melan* und *Prager* bezeichnet [2]. Wird der Distorsionstensor als isotroper Tensor gewählt und werden gleichzeitig die Rückspannungen vernachlässigt, verbleibt die Fließbedingung nach *von Mises* [57] für isotropes Materialverhalten:

$$F = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij} - \sigma_F^2(\varepsilon_v^{pl}) = 0 \quad (2.13)$$

Die Fließbedingung nach *Baltov* und *Sawczuk* (2.6) stellt die allgemeinste quadratische Fließbedingung dar und enthält als Spezialfälle die Fließbedingungen nach *Hill* (2.11), nach *Prager* (2.12) sowie nach *von Mises* (2.13).

2.2 Fließregel

Durch die *Fließregel* werden die plastischen Verzerrungssinkremente in Abhängigkeit von den momentanen Spannungen festgelegt. Nach *von Mises* [58] sind diese proportional zum Gradienten eines plastischen Potentials:

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Phi^{pl}(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.14)$$

Wird als plastisches Potential die Fließfunktion $F(\sigma)$ gewählt, entsteht hieraus die *assoziierte* Fließregel:

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (2.15)$$

Diese, auch als *Normalenregel* bezeichnete Beziehung besagt, daß sich die plastischen Verzerrungsinkremente $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ immer in Richtung der Normalen des Fließkörpers ausbilden. Weiterhin folgen aus dem *Stabilitätskriterium* von *Drucker* [25] für die Arbeit der plastischen Verzerrungsinkremente

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \geq 0 \quad (2.16)$$

sowie die Konvexität der Fließfläche [13, 44, 73].

In der Geschwindigkeitsform ergibt sich die Normalenregel zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.17)$$

Ausgehend von einem Spannungszustand an der Fließgrenze lassen sich somit bei verfestigendem Material die nachstehenden *Belastungsbedingungen* unterscheiden [44]:

$$F = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} < 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{Entlastung} \quad (2.18)$$

$$F = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{neutrale Belastung} \quad (2.19)$$

$$F = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0, \quad \dot{\lambda} > 0 \quad \text{Belastung} \quad (2.20)$$

Bei Gültigkeit der Bedingung (2.18) erfolgt eine Entlastung in den elastischen Bereich, während (2.20) zu weiteren plastischen Verzerrungen führt. Die neutrale Belastung gemäß (2.19) bedeutet lediglich eine Spannungsumlagerung.

2.3 Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

Für kleine Deformationen kann die Gesamtverzerrung additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.21)$$

Für den elastischen Anteil gilt bei Voraussetzung *linear-elastischen* Materialverhaltens das *Hookesche* Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (2.22)$$

mit dem vierstufigen Elastizitätstensor \mathbf{E} , welcher eine eindeutige Abbildung zwischen dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem elastischen Anteil des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ vermittelt. Bei *isotropem* elastischen Materialverhalten ergeben sich die Koordinaten des Elastizitätstensors zu

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.23)$$

wobei λ und μ die *Laméschen* Konstanten

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.24)$$

darstellen.

Wegen der Abhängigkeit der plastischen Deformationen von der Belastungsgeschichte ist die Darstellung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in der *Geschwindigkeits-* bzw. *Ratenform* notwendig:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} = \mathbf{E} \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}) \quad (2.25)$$

Wird der plastische Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit gemäß der Normalenregel (2.17) ersetzt, läßt sich die Gesamt-Verzerrungsgeschwindigkeit in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.26)$$

darstellen.

2.4 Entwicklungsgleichungen

Erfolgt nach dem erstmaligen Erreichen der Fließgrenze eine weitere Plastizierung, ändern sich bei verfestigendem Material Lage und Form des Fließkörpers in Abhängigkeit vom aufgetragenen Lastpfad. Der Einfluß der Belastungsgeschichte auf den Spannungs- und Verzerrungszustand bei plastischen Deformationen wird durch die Einführung zusätzlicher skalar- oder tensorwertiger *innerer Variabler* $\boldsymbol{\kappa}$ in der Fließbedingung erfaßt.

Die bei fortschreitender plastischer Verformung auftretenden Änderungen der inneren Variablen können durch Entwicklungsgleichungen der Form

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (2.27)$$

beschrieben werden [11, 44]. Die Funktionen \mathbf{q} sind dabei skalar- bzw. tensorwertig von gleicher Stufe wie die inneren Variablen $\boldsymbol{\kappa}$.

Es lassen sich drei unterschiedliche Verfestigungsmechanismen unterscheiden: isotrope, kinematische und formative Verfestigung.

- Die *isotrope Verfestigung* ist durch eine gleichmäßige Aufweitung des Fließkörpers charakterisiert und wird meist durch eine funktionelle Abhängigkeit der Fließspannung von der plastischen Vergleichsdehnung

$$\epsilon_v^{pl} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}} dt \quad (2.28)$$

beschrieben:

$$\sigma_F = A(\epsilon_v^{pl}) \quad (2.29)$$

- Rein translatorische Lageänderungen des Fließkörpers werden als *kinematische Verfestigung* bezeichnet und über sogenannte *Rückspannungen* (engl. “back-stresses”) $\boldsymbol{\alpha}$ erfaßt. Die Translationsregel von *Prager* [63]

$$\dot{\alpha}_{ij} = b_1 \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} \quad (2.30)$$

postuliert die Proportionalität der zeitlichen Zuwächse der Rückspannungen und der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten. Wird die in Gl. (2.30) enthaltene Konstante b_1 durch eine Materialfunktion $B(\varepsilon_v^{pl})$ ersetzt, entsteht ein Ansatz für die nichtlineare kinematische Verfestigung [4, 5, 26]:

$$\dot{\alpha}_{ij} = B(\varepsilon_v^{pl}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (2.31)$$

Aus der Inkompressibilität der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten folgt die deviatorische Natur des Rückspannungstensors α .

Eine Evolutionsgleichung mit Entwicklungs- und Begrenzungsterm wurde von *Armstrong* und *Frederick* [3] vorgeschlagen:

$$\dot{\alpha}_{ij} = b_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} - b_3 \varepsilon_v^{pl} \alpha_{ij} \quad (2.32)$$

Einige Autoren [39, 59, 69] verwenden auch Evolutionsgleichungen mit einer Summe von Begrenzungstermen.

- Die *formative* oder *Distorsions-Verfestigung* dagegen charakterisiert Änderungen der Form sowie Drehungen des Fließkörpers [8, 40, 41, 75]. Als Ansatz für die Entwicklung des vierstufigen Distorsionstensors wurde in Übereinstimmung mit [37, 47] die Entwicklungsgleichung nach *Danilov* [21] gewählt:

$$\dot{N}_{ijkl} = \frac{C(\varepsilon_v^{pl})}{\varepsilon_v^{pl}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{pl} \quad (2.33)$$

Auf die Verwendung sechsstufiger Materialtensoren zur Beschreibung des formativen Verfestigungsverhaltens, wie in [37, 71, 75] vorgenommen, wurde wegen der geringen Datenbasis zur Approximation der Anfangs-Fließortkurve (siehe Abschnitt 5.1) verzichtet.

Für die in den verallgemeinerten Entwicklungsgleichungen (2.29), (2.31) und (2.33) enthaltenen Funktionen $A(\varepsilon_v^{pl})$, $B(\varepsilon_v^{pl})$ und $C(\varepsilon_v^{pl})$ sind noch geeignete Ansätze zu wählen, siehe Abschnitt 2.5.

2.5 Materialmodell

Die in den vorhergehenden Abschnitten angegebenen Gleichungen zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens lassen sich zum Deformationsgesetz für kleine Verzerrungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{-1} \dots \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}) &= \mathbf{0} \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Hierin sind noch geeignete Ansätze für die in den Entwicklungsgleichungen enthaltenen Verfestigungsfunktionen \mathbf{q} sowie für die Fließfunktion F zu wählen. In einer Materialbibliothek sind dann entsprechende Routinen zur Berechnung der Funktionswerte sowie

der für den Integrationsalgorithmus des Deformationsgesetzes und für den Optimierungsalgorithmus zur Parameteridentifikation benötigten Ableitungen bereitzustellen.

Dabei konnte auf eine von *Kretschmar* [47] entwickelte Materialbibliothek zurückgegriffen werden, welche die Berücksichtigung der Fließbedingung nach *Baltov* und *Sawczuk* (2.6) und der verallgemeinerten Entwicklungsgleichungen (2.29), (2.31) und (2.33) erlaubt. Es ist möglich, die hierin enthaltenen Funktionen $A(\varepsilon_v^{pl})$, $B(\varepsilon_v^{pl})$ sowie $C(\varepsilon_v^{pl})$ in Abhängigkeit von jeweils bis zu drei Parametern $a_1 \dots a_3$, $b_1 \dots b_3$ bzw. $c_1 \dots c_3$ zu wählen. Diese Materialbibliothek wurde entsprechend den Anforderungen der vorliegenden Untersuchungen modifiziert und ergänzt, so daß die im folgenden aufgeführten Ansätze realisiert werden können.

- Fließbedingung:
 - nach *Baltov* und *Sawczuk* (2.6) bzw. als Spezialfälle die Fließbedingungen
 - nach *Hill* (2.11),
 - nach *Melan* und *Prager* (2.12)
 - sowie nach *von Mises* (2.13).
- Isotrope Verfestigung:
 - Potenzansatz nach *Ludwik* [42]

$$\sigma_F = \sigma_{F_0} + a \left(\varepsilon_v^{pl} \right)^n \quad (n < 1) \quad (2.35)$$

Dieser hat den Nachteil, daß die numerische Integration des Deformationsgesetzes wegen $d\sigma_F/d\varepsilon_v^{pl}|_{(\varepsilon_v^{pl}=0)} = \infty$ versagt. Daher wurde der Ansatz in der von *Ulbricht* [74] vorgeschlagenen erweiterten Form

$$\sigma_F = \sigma_{F_0} + a \left[\left(\varepsilon_v^{pl} + \beta \right)^n - \beta^n \right] \quad (\beta > 0, n < 1)$$

verwendet, siehe auch [16, 36, 47]. Hierin stellt β keinen Materialparameter dar, sondern dient lediglich der Vermeidung numerischer Instabilität. β ist daher konstant zu halten und, wie im Abschnitt 5.3 gezeigt wird, in Abhängigkeit von der Maschinengenauigkeit möglichst klein zu wählen, um Auswirkungen auf die anderen zu identifizierenden Parameter zu vermeiden.

Mit den drei verallgemeinerten Parametern $a_1 \dots a_3$ nimmt der obige Ansatz die Form

$$\sigma_F = \sigma_{F_0} + a_1 \left[\left(\varepsilon_v^{pl} + a_2 \right)^{a_3} - a_2^{a_3} \right] \quad (a_2 > 0, a_3 < 1) \quad (2.36)$$

an. Aus numerischen Gründen ist es vorteilhaft, wenn alle Parameter die gleiche Größenordnung besitzen [22]. Daher wurde die schon von *Bohnsack* [16] vorgeschlagene Normierung des Parameters a_3 verwendet.

- Um den in den einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurven (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3) auftretenden Übergangsbereich vom linearelastischen Verhalten zu dem oberhalb von $\varepsilon \approx 0,02$ beobachteten asymptotischen Verhalten im plastischen Bereich zu modellieren, wurden Ansätze auf der Grundlage der *arctan*- und der Exponentialfunktion gewählt.

Durch den arctan-Ansatz

$$\sigma_F = \sigma_{F_0} + a_1 \arctan(a_2 \varepsilon_v^{pl}) + a_3 \varepsilon_v^{pl} \quad (a_2 > 0) \quad (2.37)$$

wird ein asymptotisches Verhalten der Fließkurve $\sigma_F = \sigma_F(\varepsilon_v^{pl})$ gegen eine Gerade mit dem Anstieg a_3 erzeugt.

- Als Exponentialansatz wurde

$$\sigma_F = \sigma_{F_0} + a_1 \left[1 - \exp(-a_2 \varepsilon_v^{pl}) \right] + a_3 \varepsilon_v^{pl} \quad (a_2 > 0) \quad (2.38)$$

gewählt. Das asymptotische Verhalten der Fließkurve wird wiederum durch eine Gerade mit dem Anstieg a_3 beschrieben.

- Kinematische Verfestigung:

- Verfestigungsregel nach *Prager* (2.30)

$$\dot{\alpha}_{ij} = b_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (b_1 > 0) \quad (2.39)$$

- Nichtlineare kinematische Verfestigung gemäß

$$\dot{\alpha}_{ij} = (b_1 + b_2 \varepsilon_v^{pl}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (2.40)$$

- Verfestigungsregel nach *Armstrong* und *Frederick* (2.32)

$$\dot{\alpha}_{ij} = b_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} - b_3 \dot{\varepsilon}_v^{pl} \alpha_{ij} \quad (b_1 > 0, b_3 > 0) \quad (2.41)$$

- Formative Verfestigung:

- Ansatz nach *Danilov* (2.33) mit einer linearen Funktion $C(\varepsilon_v^{pl})$

$$\dot{N}_{ijkl} = \frac{c_1 + c_2 \varepsilon_v^{pl}}{\dot{\varepsilon}_v^{pl}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{pl} \quad (2.42)$$

Die Parameter können jeweils einzeln über entsprechende Schalter aktiviert (zur Optimierung frei gegeben) bzw. deaktiviert (konstant gehalten) werden. Weitere Schalter übernehmen die Auswahl der zum gewählten Ansatz gehörenden Routinen zur Berechnung der Funktionswerte und Ableitungen.

Zur Integration des Deformationsgesetzes sind zusätzlich in Vorversuchen zu ermittelnde Größen bereitzustellen:

- Zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens der Elastizitätstensor \mathbf{E} bzw. für isotrope Elastizität die elastischen Konstanten E und ν , siehe Abschnitt 3.1.
- Die Anfangs-Fließortkurve, insbesondere die Anfangs-Fließspannung σ_{F_0} sowie ggf. Anfangswerte der inneren Variablen, siehe Abschnitt 5.1.

Kapitel 3

Experimentelle Ergebnisse

Sämtliche zur Identifikation der Materialparameter verwendeten Experimente wurden an der Professur Experimentelle Mechanik der TU Chemnitz durchgeführt [18, 45, 46]. Dort fand auch die Auswertung der Rohdaten statt.

Es wurden Zugversuche und Biegeversuche an geraden Proben sowie Biegeversuche an gekerbten Proben ausgeführt. Eine Darstellung der Versuchsdurchführung und der experimentellen Ergebnisse der Versuche an geraden Proben ist in [18] enthalten. Der Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe und dessen Auswertung wurden bereits in [16] und [47] beschrieben. Daher sollen hier lediglich einige Grundzüge der experimentellen Verfahren erläutert werden. Weiterhin werden die für die Parameteridentifikation verwendeten experimentellen Ergebnisse aufgeführt und interpretiert.

Die Versuche an geraden Proben dienten der Bestimmung der elastischen Konstanten, der Anfangs-Fließortkurve und der einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurven. Bei den Versuchen an der gekerbten Biegeprobe wurden Moiréaufnahmen zur Messung der Verschiebungsfelder angefertigt. Ein speziell entwickeltes Approximationsverfahren [16, 17] zur Ermittlung der Verschiebungen in beliebigen materiellen Punkten der Probe erlaubte gleichzeitig die Berechnung der Verzerrungen, deren Werte im Ligament, der Verbindungslinie der Kerbgründe, als Belastung für die vorgestellten Berechnungen diente.

Da das für die Herstellung der Proben verwendete Halbzeug infolge des Walzprozesses plastisch-orthotropes Materialverhalten aufweist, wurden sowohl Proben untersucht, bei denen die Längsachse parallel zur Walzrichtung verläuft, als auch Proben, bei denen die Längsachse senkrecht zur Walzrichtung angeordnet ist. Im weiteren sollen hierfür die Bezeichnungen *“Probe in Walzrichtung”* bzw. *“Probe quer zur Walzrichtung”* verwendet werden.

3.1 Materialauswahl

Hinsichtlich der Erfüllung der Voraussetzungen

- Vorliegen des Werkstoffes als gewalztes Blech mit plastischer Orthotropie,
- keine Streckgrenzeneffekte,
- stabiles Verhalten im plastischen Bereich sowie
- vernachlässigbare rheonome Effekte

wurde der austenitische Stahl X6 CrNiTi 18-10 (Werkstoffnummer 1.4541) für die Experimente ausgewählt [45]. Die chemische Zusammensetzung und die physikalischen Eigenschaften sind aus der DIN 17440 [23], DIN 17441 [24] bzw. der EN 10088 [27] ersichtlich.

Das Material stand in Form eines Walzbleches zur Verfügung, aus dem die zu untersuchenden Proben in Walzrichtung bzw. quer zur Walzrichtung entnommen wurden.

Die in [18] angegebenen Meßwerte der elastischen Konstanten lassen die Modellierung des elastischen Teilstoffgesetzes als linearelastisch-isotropes Materialverhalten zu. Die Berechnungen zur Parameteridentifikation wurden unter Zugrundelegung eines Elastizitätsmoduls $E = 192\,000$ MPa und einer Querkontraktionszahl $\nu = 0,31$ ausgeführt.

3.2 Zugversuche

Die Zugversuche wurden an Flachzugproben durchgeführt, wobei die Verzerrungen in der Längsrichtung und in beiden Querrichtungen mit Dehnungsmeßstreifen sowie die aufgebrachte Zugkraft mit Hilfe einer Kraftmeßdose gemessen wurden [18]. Aufgrund der vorgenommenen Versuchsdurchführung kann von einem einachsigen homogenen Spannungszustand im Meßgebiet ausgegangen werden.

Bild 3.1 enthält die gemessene *Cauchy*-Spannung σ in Abhängigkeit von der logarithmischen oder *Hencky*-Dehnung φ für jeweils eine Probe in Walzrichtung bzw. quer zur Walzrichtung.

Die Zugspannungen für die Probe quer zur Walzrichtung weisen im plastischen Bereich um etwa 14 MPa größere Werte als die Zugspannungen für die Probe in Walzrichtung auf, wobei die Spannungsdifferenz zwischen beiden Spannungs-Dehnungs-Kurven im plastischen Bereich unverändert bleibt.¹

Bei Druckversuchen stellen sich infolge der Reibung an den Lagerstellen mit wachsender Deformation tonnenförmige Ausbauchungen der Proben und somit ein inhomogener dreiachsiger Spannungszustand ein. Auf die Untersuchung der orthotropen Eigenschaften des Walzblechs im Druckversuch wurde daher verzichtet [18].

¹In DIN 17441 [24] werden für die 0,2%- und die 1%-Dehngrenzen in Querrichtung ebenfalls um 15 MPa größere Werte als in Längsrichtung angegeben.

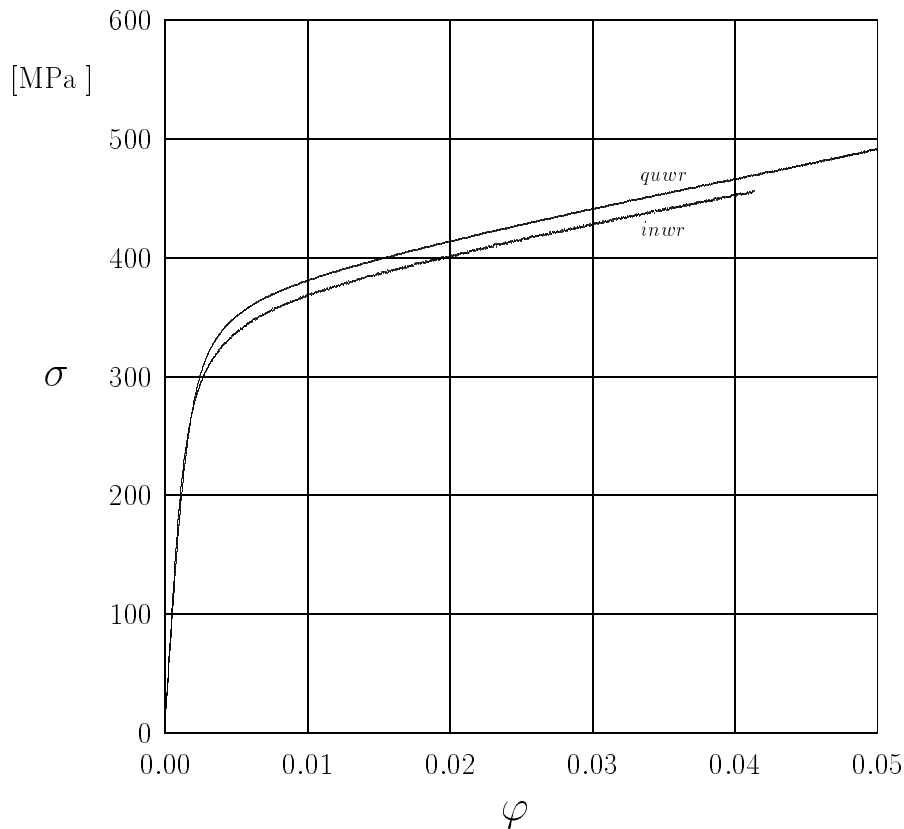


Bild 3.1: *Spannungs-Dehnungs-Kurven aus dem Zugversuch, nach [18]*
inwr – Probe in Walzrichtung
quwr – Probe quer zur Walzrichtung

3.3 Biegeversuche an geraden Proben

Um trotzdem Aussagen über das Spannungs-Dehnungs-Verhalten sowohl für einachsigen Zug als auch für einachsigen Druck zu erhalten, wurden Biegeversuche an geraden Proben ausgeführt. Im Bild 3.2 sind die Probengeometrie und die Belastung dargestellt.

Mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen wurden die Längs- und Querdehnungen an der Ober- und Unterseite der Probe gemessen. Aus der Belastung F ergibt sich das aufgebraachte Biegemoment.

Werden kleine Verformungen, die Gültigkeit der *Bernoulli*-Hypothese und damit eine lineare Verteilung der Längsdehnungen über der Höhe des Rechteckquerschnittes sowie das Vorliegen eines einachsigen Spannungszustandes auf der Ober- und Unterseite der Probe vorausgesetzt, können die Randspannungen σ^z auf der Zugseite und σ^d auf der Druckseite

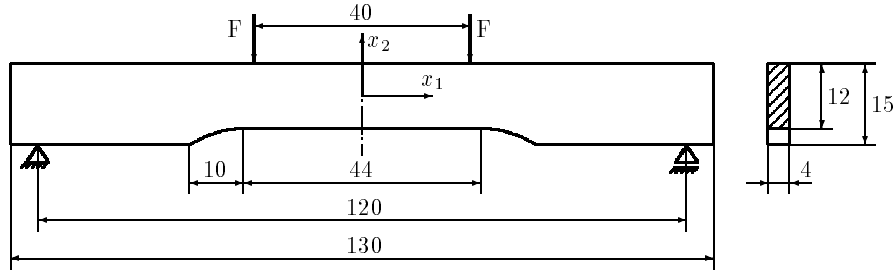


Bild 3.2: Gerade Biegeprobe, Geometrie und Belastung

aus den Längsdehnungen ε^z und ε^d sowie dem Biegemoment M über

$$\sigma^{z,d} = \frac{2}{bh^2} \frac{2M + \bar{\varepsilon} \frac{dM}{d\bar{\varepsilon}}}{\frac{d\varepsilon^{z,d}}{d\bar{\varepsilon}}} \quad \text{mit} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\varepsilon^z - \varepsilon^d) \quad (3.1)$$

ermittelt werden [46]. Die auf diese Weise berechnete Zugspannungskurve wies gegenüber derjenigen aus dem Zugversuch einen deutlich kleineren Anstieg im plastischen Bereich auf, die Druckspannungskurve dagegen einen deutlich größeren.

Mit Hilfe einer Querschnittskorrektur wurde versucht, die aus dem Biegeversuch resultierenden Spannungs-Dehnungs-Kurven zu verbessern. Der Querschnitt der auf Biegung beanspruchten Probe wird dabei als trapezförmig vorausgesetzt, und in die erweiterte Formel zur Bestimmung der Zug- und Druckspannungen gehen nunmehr auch die gemessenen Querdehnungen ein, siehe *Bormann* [18].

Für die Biegeversuche standen jeweils zwei Proben in Walzrichtung bzw. quer zur Walzrichtung zur Verfügung. Die erhaltenen Zug- und Druckspannungskurven aus dem Biegeversuch sowie zum Vergleich die zugehörige Zugspannungskurve aus dem Zugversuch sind für Proben in Walzrichtung im Bild 3.3 sowie für Proben quer zur Walzrichtung im Bild 3.4 dargestellt.

Auffällig ist zunächst, daß die Druckspannungen im gesamten Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurven betragsmäßig größer als die Zugspannungen sind. Diese Erscheinung kann so gedeutet werden, daß infolge der Vorbelastung durch Walzen eine Textur der Kristallite auftritt, welche zu größeren Druckspannungen führt. Dieser sogenannte “strength differential-” oder S-D-Effekt wurde z. B. auch von *Spitzig* et al. [70] beobachtet. Eine zusammenfassende Darstellung enthält [1]. Im untersuchten Materialmodell wird dieser Effekt durch Anfangswerte der Rückspannungen beschrieben, welche bei der Approximation der Anfangs-Fließortkurve berechnet werden, siehe Abschnitt 5.1.

Weiterhin ist eine zum Teil deutliche Materialstreuung zu beobachten. Da die Ergebnisse nur für jeweils zwei Proben zur Verfügung stehen, kann diese aber nicht näher untersucht werden.

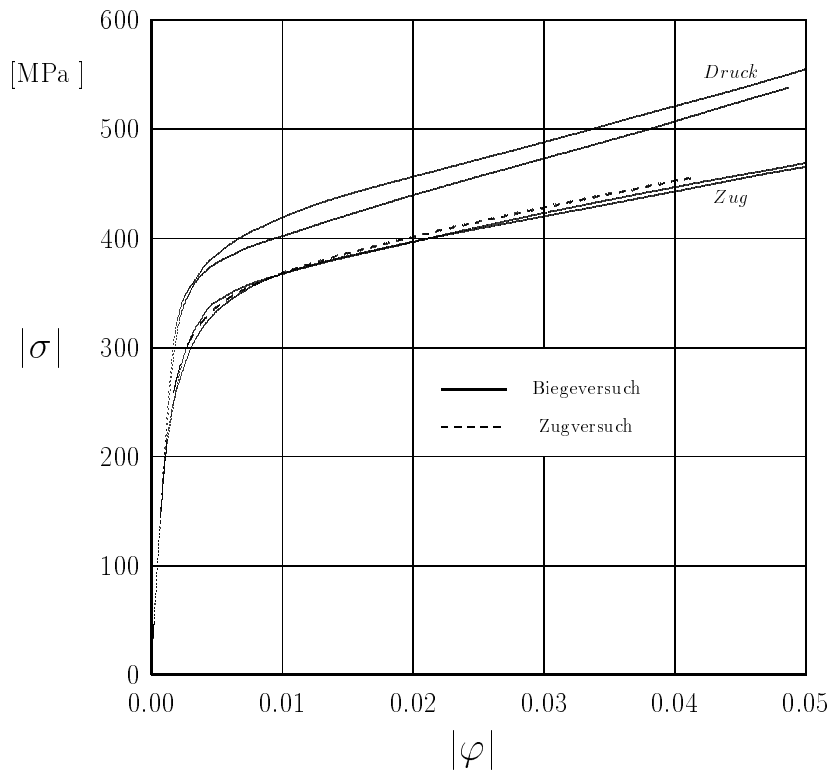


Bild 3.3: Zug- und Druckspannungskurven für Proben in Walzrichtung, nach [18]

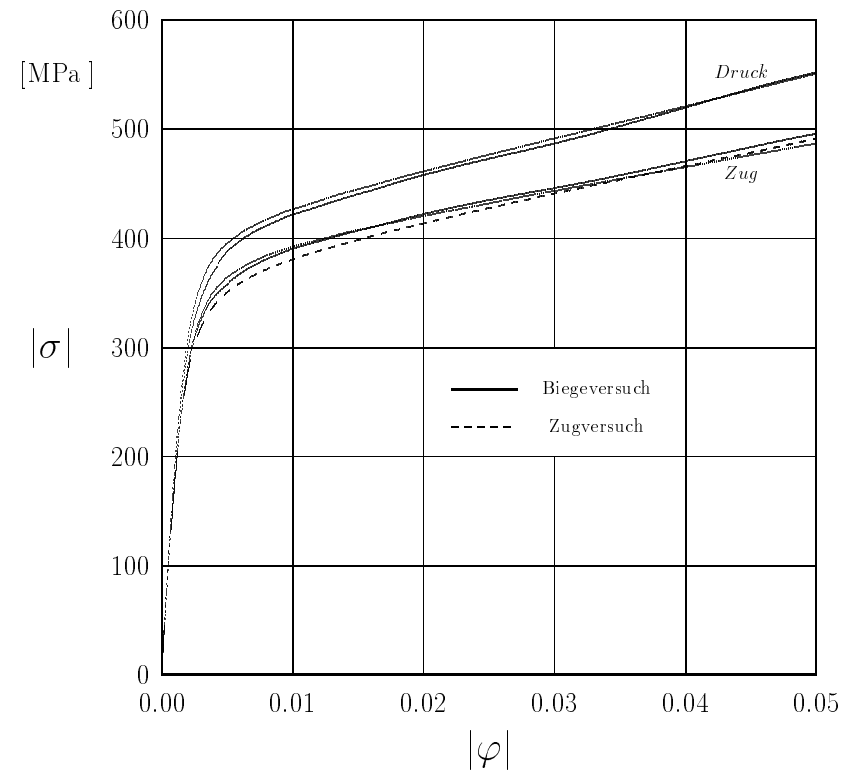


Bild 3.4: Zug- und Druckspannungskurven für Proben quer zur Walzrichtung, nach [18]

Der Anstieg der Spannungs-Dehnungs-Kurven im plastischen Bereich entspricht dem *Tangentenmodul*, welcher die Verfestigung des Materials charakterisiert. Die Anstiege der aus dem Biegeversuch ermittelten Zugspannungskurven einerseits wie auch andererseits die Anstiege der Druckspannungskurven sind für Proben sowohl in als auch quer zur Walzrichtung jeweils nahezu gleich. Dagegen fällt auf, daß trotz der vorgenommenen Querschnittskorrektur die Anstiege der Zugspannungskurven aus dem Biegeversuch kleiner als die derjenigen aus dem Zugversuch, die Anstiege der Druckspannungskurven jedoch größer sind. Mit Hilfe der Parameteridentifikation unter Verwendung des *arctan*-Ansatzes nach Gl. (2.37) berechnete Werte der asymptotischen plastischen Tangentenmoduli (Parameter a_3) sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Leider stehen keine Ergebnisse aus Druckversuchen zum Vergleich zur Verfügung.

Versuch	Anzahl	Spannungs-Dehnungs-Kurven	plastischer Tangentenmodul
Zugversuch	2	Zugspannungskurven	2633 MPa \pm 1,9 %
Biegeversuch	4	Zugspannungskurven	2300 MPa \pm 2,7 %
Biegeversuch	4	Druckspannungskurven	3248 MPa \pm 2,5 %

Tabelle 3.1: *Asymptotische plastische Tangentenmoduli einschließlich Vertrauensbereichen für Zug- und Biegeversuch*

Es erscheint daher eher unwahrscheinlich, daß die Abweichungen in den Tangentenmoduli allein Folge der Materialstreuung, wie in [18] vermutet, darstellen. Da sich die Abweichungen mit zunehmender Dehnung ausbilden, kommen als Ursachen zusätzlich die Auswirkungen der sich im betrachteten Verzerrungsbereich ausprägenden geometrischen Nichtlinearität in Frage, so daß die zur Herleitung der Auswerteformel verwendeten Voraussetzungen möglicherweise verletzt werden.

Aus den Spannungs-Dehnungs-Kurven wurden weiterhin Meßwerte für die Fließspannungen bei 0,01 % Offset-Dehnung und die zugehörigen Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}^{pl}$ bestimmt [18]. Da die Spannungs-Dehnungs-Kurven für jeweils zwei Proben in Walzrichtung und zwei weitere Proben quer zur Walzrichtung ausgewertet wurden, stehen somit acht Meßwerte für die Fließspannungen sowie acht weitere Meßwerte für die Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit zur Approximation der Anfangs-Fließortkurve zur Verfügung, siehe Bild 5.1.

3.4 Biegeversuche an gekerbten Proben

Die Parameteridentifikation aus Verschiebungsfeldern mit Hilfe der FEM ermöglicht die Einbeziehung inhomogener und mehrachsiger Beanspruchung. Hierfür wurden Biegeversuche an gekerbten Proben durchgeführt [16, 46, 47]. Um für die einzelnen materiellen Teilchen der Probe ein breites Spektrum unterschiedlicher Deformationswege zu erhalten, wurde eine Probengeometrie verwendet, für die sich ein möglichst großes Verhältnis der Hauptspannungen σ_2/σ_1 auf dem Ligament ergibt [47], siehe Bild 3.5.

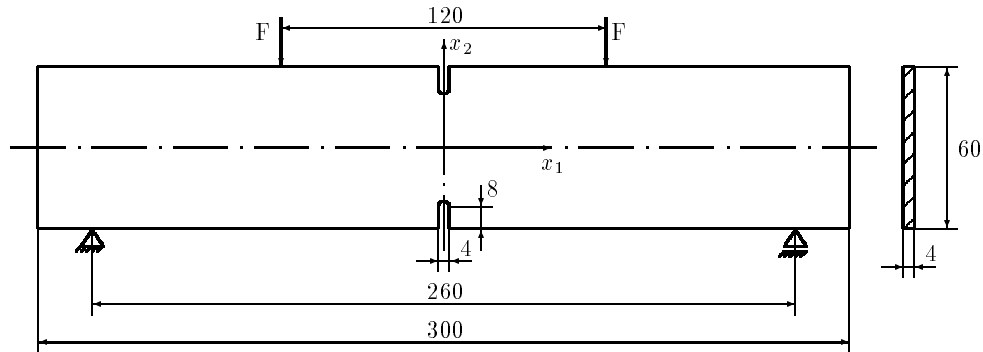


Bild 3.5: Gekerbte Biegeprobe, Geometrie und Belastung

Zur Messung der Verschiebungsfelder in der Blechebene wurde das In-plane-Moiré-Verfahren (siehe z. B. *Naumann* [61]) verwendet. Hierbei wird ein Objektgitter auf die unverformte Probe aufgeklebt und mit der Probe in den einzelnen Lastschritten verformt. In jedem Lastschritt wird dann ein unverformtes Bezugsgitter über die Probe gelegt, so daß ein Moiréstreifenbild entsteht, welches fotografiert wird. Bei Verwendung eines Kreuzgitters als Objektgitter und eines Liniengitters als Bezugsgitter stellen die Moiréstreifen Isotheten des Feldes der Verschiebungskomponente senkrecht zur Richtung des Liniengitters dar.

Für eine Probe in Walzrichtung stehen Moiréaufnahmen für insgesamt 14 Lastschritte zur Verfügung. Das Belastungsregime ist aus Bild 3.6 ersichtlich.

Moiréaufnahmen für die Lastschritte 5 und 12 sind exemplarisch in den Bildern 3.7 bis 3.10 dargestellt.

Die Ausmessung der Moiréaufnahmen erfolgte halbautomatisch, indem unter einem Meßmikroskop die Isotheten manuell abgetastet und für eine gewisse Anzahl von Punkten deren Ortskoordinaten elektronisch erfaßt und gespeichert wurden. Aus der zugehörigen Isothetenordnung und der Gitterteilung lassen sich somit diskrete Messwerte für die Verschiebungsfelder u_1 und u_2 ermitteln.

Diese wurden benutzt, um mit dem von *Bohnsack* [16, 17] entwickelten Approximationsverfahren stetige Verschiebungsfelder zu erhalten, aus denen die Verschiebungen und Verzerrungen an vorgegebenen Punkten bestimmt werden können. Die Verzerrungszinkremente im Ligament der gekerbten Biegeprobe stellen die Belastung bei der punktwweisen Integration des Deformatonsgesetzes dar, vgl. Abschnitt 4.1.

Die mit der oben beschriebenen Methode erhaltenen Meßwerte der Längsdehnungen ε_{11} und der Querdehnungen ε_{22} sind für die Belastungs-Lastschritte 1 bis 6 in den Bildern 3.11

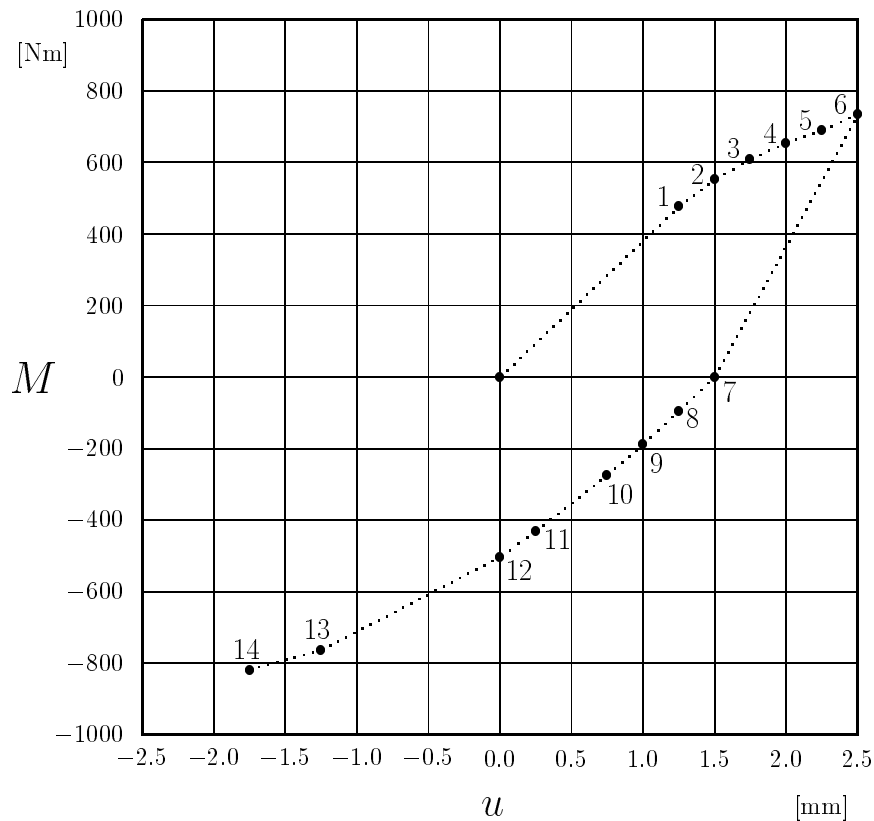


Bild 3.6: Gekerbte Biegeprobe: Biegemoment M in Abhängigkeit vom Traversenweg u

bzw. 3.12 sowie für die Lastschritte 7 bis 14 der Ent- bzw. Wiederbelastung in den Bildern 3.13 bzw. 3.14 dargestellt.

Die Querdehnung in den Kerbgründen müßte auch bei Berücksichtigung der Anfangswerte der Rückspannungen etwa das (-0,5)-fache des Wertes der zugehörigen Längsdehnung betragen. Dieser Wert wird jedoch bei weitem nicht erreicht, so daß die in den Kerben geltende Randbedingung des Verschwindens der äußeren Normalspannung $\sigma_{22} = 0$ im Ergebnis der punkweisen Integration des Deformationsgesetzes für den ebenen Spannungszustand nicht erfüllt wird. Daher wurde für die Kerbgründe die Integration des Deformationsgesetzes unter Zugrundelegung eines einachsigen Spannungszustandes vorgesehen.

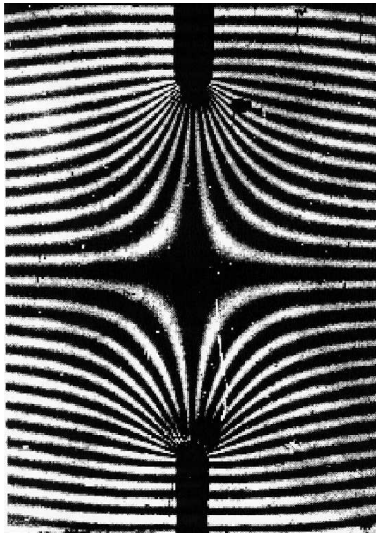


Bild 3.7: Moiréstreifen für Verschiebungen
in Längsrichtung, Lastschritt 5

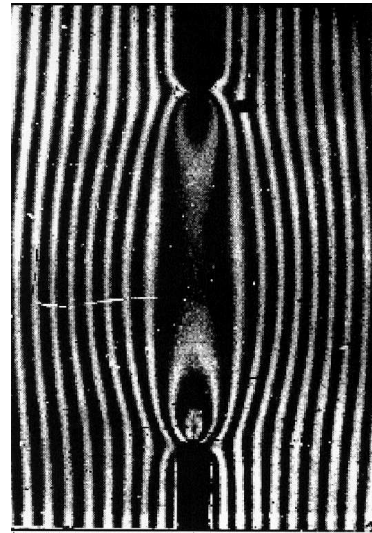


Bild 3.8: Moiréstreifen für Verschiebungen
in Querrichtung, Lastschritt 5



Bild 3.9: Moiréstreifen für Verschiebungen
in Längsrichtung, Lastschritt 12



Bild 3.10: Moiréstreifen für Verschiebungen
in Querrichtung, Lastschritt 12

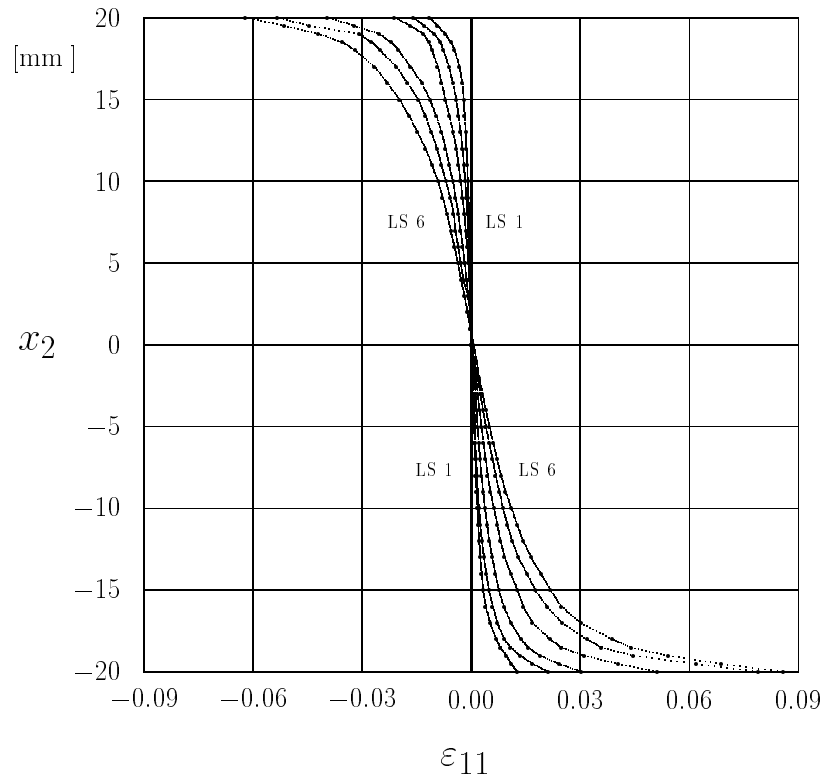


Bild 3.11: Längsdehnungen ε_{11} im Ligament,
Lastschritte 1 - 6

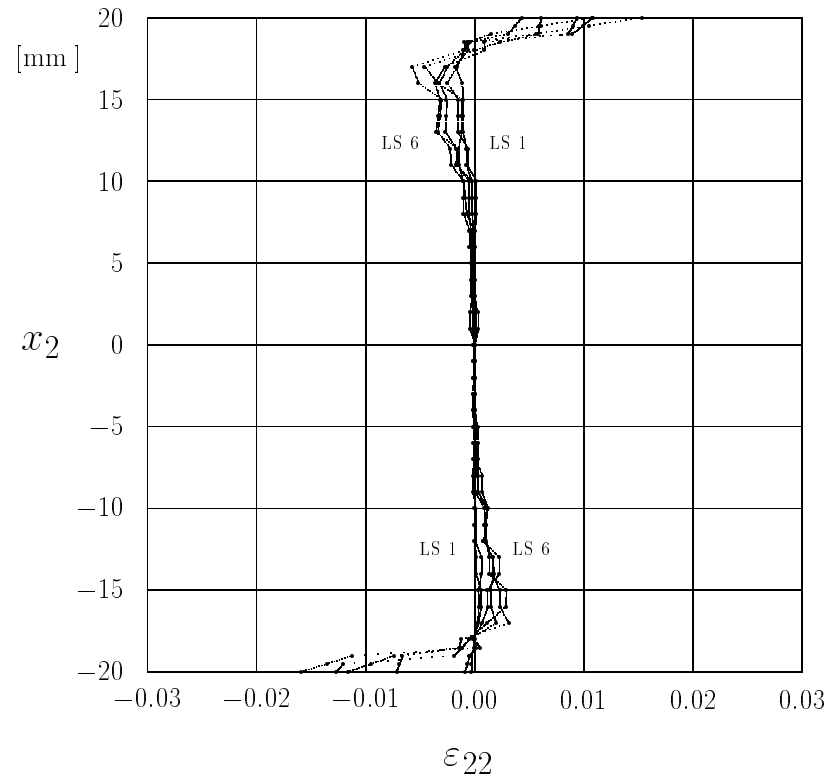


Bild 3.12: Querdehnungen ε_{22} im Ligament,
Lastschritte 1 - 6

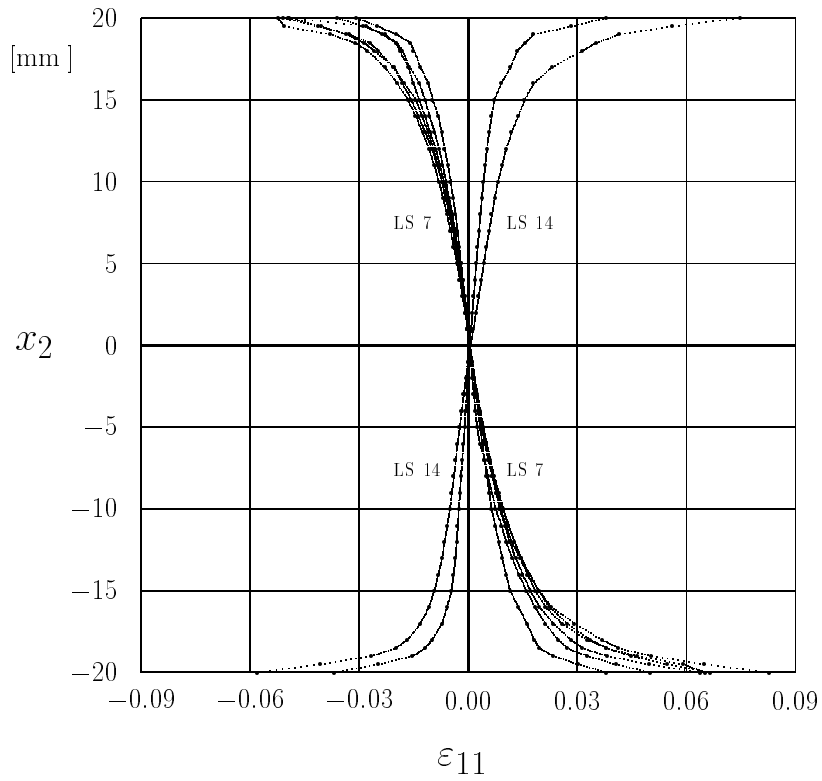


Bild 3.13: Längsdehnungen ε_{11} im Ligament, Lastschritte 7 - 14

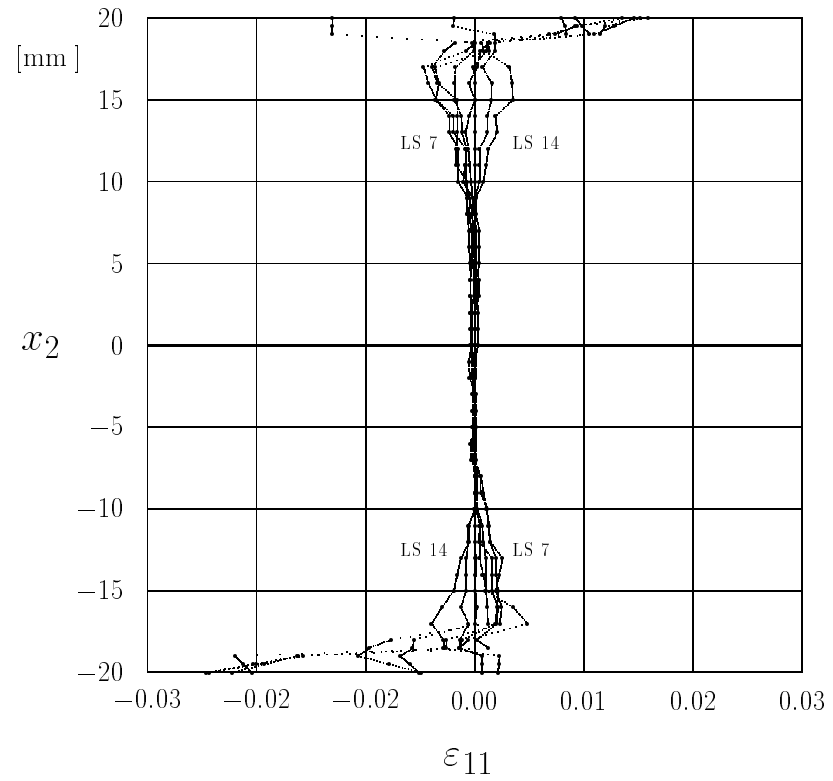


Bild 3.14: Querdehnungen ε_{22} im Ligament, Lastschritte 7 - 14

Kapitel 4

Berechnungsmodell zur Parameteridentifikation

4.1 Lokale Integration des Deformationsgesetzes

Das im Kapitel 2 hergeleitete Deformationsgesetz bei kleinen Verzerrungen

$$\mathbf{E}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p}) = 0 \quad (4.3)$$

stellt ein Algebro-Differentialgleichungssystem mit den im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (4.1) und Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen (4.2) sowie der algebraischen Fließbedingung (4.3) dar. Hierin ist die Inverse \mathbf{E}^{-1} des Elastizitätstensors entsprechend dem gemessenen elastischen Materialverhalten bekannt. Für die Fließfunktion $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p})$ und die Evolutionsfunktionen $\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{p})$ der inneren Variablen sind geeignete Ansatzfunktionen zu wählen.

Aus der Versuchsauswertung an der gekerbten Biegeprobe stehen lastschrittweise die aus den Verschiebungsfeldern ermittelten Verzerrungen in Punkten des Ligaments zur Verfügung [46]. Damit läßt sich jedem untersuchten Punkt des Ligaments eine individuelle Belastungsgeschichte in Form von Verzerrungsänderungen $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lastschritten zuordnen. Diese können als äußere Belastung aufgefaßt werden, für die durch numerische Integration des Deformationsgesetzes (4.1) - (4.3) die zugehörigen Spannungen und inneren Variablen für alle Vergleichsorte und Lastschritte zu bestimmen sind. Als zusätzliche Variable tritt der plastische Multiplikator $\dot{\lambda}$ auf.

Die Zeitdiskretisierung von (4.1) - (4.3) mit dem impliziten *Euler*-Verfahren führt auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_{n-1}) + \dot{\lambda}_n \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\kappa}_n - \boldsymbol{\kappa}_{n-1} - \dot{\lambda}_n \Delta t \mathbf{q}|_n &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$F|_n = 0$$

welches mit dem *Newton*-Verfahren gelöst wird (s. *Michael* und *Meyer* [56]). Zur einfachen Darstellung und Programmierung wird im folgenden $\lambda_n = \dot{\lambda}_n \Delta t$ gesetzt.

Die Startwerte für einen neuen Lastschritt werden entsprechend dem elastischen Prediktor

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_n^0 &= \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \mathbf{E} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n \\
\boldsymbol{\kappa}_n^0 &= \boldsymbol{\kappa}_{n-1} \\
\lambda_n^0 &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

gewählt. Dabei wird zunächst geprüft, ob die auf diese Weise bestimmten Spannungen die Fließgrenze überschreiten und plastisches Fließen auftritt. Ist dies der Fall, so muß zur Berechnung der $(k+1)$ -ten Iterierten gemäß

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n^{k+1} \\ \boldsymbol{\kappa}_n^{k+1} \\ \lambda_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n^k \\ \boldsymbol{\kappa}_n^k \\ \lambda_n^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\left(\mathbf{J}|_n^k \right) \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n - \lambda_n^k \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n^k - \mathbf{E}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_n^k - \boldsymbol{\sigma}_{n-1}) \\ \lambda_n^k \mathbf{q}|_n^k - (\boldsymbol{\kappa}_n^k - \boldsymbol{\kappa}_{n-1}) \\ - F|_n^k \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

mit der Systemmatrix

$$\left(\mathbf{J}|_n^k \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} + \lambda_n^k \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right|_n^k & \lambda_n^k \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\kappa}} \right|_n^k & \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n^k \\ -\lambda_n^k \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n^k & \mathbf{I} - \lambda_n^k \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right|_n^k & -\mathbf{q}|_n^k \\ \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n^k & \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right|_n^k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

gelöst werden. Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis der Betrag des Vektors der rechten Seite von (4.7) eine vorzugebende Schranke unterschreitet.

Um ein Integrationsergebnis zu erhalten, welches hinsichtlich der für die anschließende Optimierung benötigten Spannungen weitgehend unabhängig von der Größe der Lastinkremente ist, wurde eine Unterteilung der Lastschritte in beliebig viele Zwischenschritte mit linearem Belastungsweg vorgesehen. Testrechnungen ergaben, daß bei einer Unterteilung in zehn Zwischenschritte Spannungen erhalten werden, die auf mindestens eine Nachkommastelle genau sind.

Falls eine der in (4.8) enthaltenen Ableitungen der Evolutionsfunktionen bzw. der Fließfunktion Unendlich wird, ist die Integration des Deformationsgesetzes nicht möglich. Dies wäre bei Verwendung des Potenzansatzes nach *Ludwik* (2.35) bzw. ohne Berücksichtigung des zusätzlichen Parameters a_2 in (2.36) für $\varepsilon_v^{pl} = 0$ der Fall.

Für die Experimente an den gekerbten und den geraden Biegeproben kann von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen werden. An den Rändern der Proben gilt zusätzlich, daß die Normalspannung in Querrichtung Null sein muß. Damit liegt in den Kerbgründen der gekerbten Biegeprobe, an der Ober- und Unterseite der geraden Biegeproben sowie für den Zugversuch ein näherungsweise einachsiger Spannungszustand vor. Demzufolge wurde die Integration des Deformationsgesetzes (4.1) - (4.3) im Inneren der gekerbten Biegeprobe unter Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes, jedoch in den Kerbgründen sowie für die Ober- und Unterseite der geraden Biegeproben und die Zugproben unter Annahme eines einachsigen Spannungszustandes durchgeführt.

Durch numerische Integration der berechneten Spannungen in den gewählten Vergleichsorten über den Querschnitt der gekerbten Biegeprobe lassen sich Vergleichswerte für die globalen Kraftgrößen Biegemoment und Normalkraft bestimmen.

4.2 Gestaltung der Zielfunktion

Die Identifikation von Materialparametern \mathbf{p} erfolgt durch Anpassung eines Modells

$$y = y(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (4.9)$$

an zugehörige Meßwerte \hat{y} . Dabei stellt \mathbf{x} einen Vektor unabhängiger Zustandsvariabler dar, während die abhängige Variable y in der Regel skalarwertig ist.¹

Als Abstandsmaß zwischen den gemessenen Werten \hat{y} und den durch das Modell (4.9) definierten berechneten Werten y ist die Verwendung des absoluten Fehlers

$$\Delta y_{abs} = y - \hat{y} \quad (4.10)$$

oder des relativen Fehlers

$$\Delta y_{rel} = \frac{y - \hat{y}}{\hat{y}} \quad (4.11)$$

denkbar. Die Benutzung des relativen Fehlers, die z. B. in [68] vorgenommen wird, ist nur für monoton wachsende Vorgänge, z.B. für einen Belastungsvorgang, möglich. Dagegen ist für Lastzyklen mit Belastung und anschließender Ent- sowie Gegenbelastung wegen der

¹Für vektor- oder tensorwertige Vergleichsgrößen muß eine skalarwertige Ersatzgröße (Norm, Invariante) gewählt werden.

dabei auftretenden Nulldurchgängen der Vergleichswerte nur die Anwendung des absoluten Fehlers sinnvoll.

Die Meßwerte der für die Parameteridentifikation benutzten physikalischen Größen stehen für eine gewisse Anzahl n von Zuständen zur Verfügung. Die Gesamtheit der Meßwerte \hat{y}_i soll nunmehr in einem Vektor $\hat{\mathbf{y}}$, die Gesamtheit der zugehörigen berechneten Werte y_i in einem Vektor \mathbf{y} zusammengefaßt werden. Damit ist prinzipiell jede Vektornorm zur Definition eines Abstandsmaßes zwischen dem Vektor der berechneten Werte \mathbf{y} und dem Vektor der Meßwerte $\hat{\mathbf{y}}$ möglich. Die wichtigsten Normen für einen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathcal{R}^n$ sind

- die Betragssummennorm (L_1 -Norm)

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (4.12)$$

- die *Euklidische* oder Quadratsummennorm (L_2 -Norm)

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (4.13)$$

- und die Maximumnorm (L_∞ -Norm)

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |v_i| \quad (4.14)$$

Seibert [68] untersuchte Zielfunktionen auf der Basis der Normen (4.12) - (4.14) mit Hilfe “synthetischer”, d.h. für ein bekanntes Modell mit vorgegebenen Parametern erzeugter Meßwerte mit und ohne Berücksichtigung normal verteilter Meßfehler und stellte einen näherungsweise linearen Zusammenhang zwischen den drei Zielfunktionstypen fest.

Bei der Approximation realer Meßwerte wird im allgemeinen die Quadratsummennorm (4.13) verwendet. Da die Meßfehler, soweit sie nicht systematischer Natur sind, um den wahren Wert streuen, wird durch die Verwendung der Quadratsummennorm eine Approximation aller Meßwerte im quadratischen Mittel erreicht. Außerdem ist die Quadratsummennorm stetig differenzierbar, während diese Eigenschaft für die anderen Normen wegen der darin enthaltenen Betragsfunktion nicht erfüllt ist. Somit wäre bei Verwendung der Maximumnorm oder der Betragssummennorm die Erfüllung der Voraussetzungen für die im Abschnitt 4.3 angegebenen Optimalitätskriterien der Zielfunktion und die Anwendung gradientenbasierter Optimierungsverfahren nicht möglich. Weiterhin beruht die im Abschnitt 4.5 vorgestellte Theorie der Parameterschätzung ebenfalls auf der Verwendung der Quadratsummennorm, so daß ausschließlich diese für die im folgenden dargestellten Berechnungen benutzt wurde.

Die Zielfunktion zur Bestimmung der unbekannten Materialparameter \mathbf{p} nimmt nunmehr die Form

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n (y_i(\mathbf{p}) - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.15)$$

an.

Als Kriterium für die Einschätzung der erreichten Approximationsgüte wird die *mittlere quadratische Abweichung*

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n}} \quad (4.16)$$

verwendet. Für die im Abschnitt 4.5 erläuterte Theorie der Parameterschätzung ist es notwendig, die *Standardabweichung*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - n_p}} = \sqrt{\frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n - n_p}} \quad (4.17)$$

zu berechnen, wobei s^2 einen Schätzwert für die Varianz σ^2 der Stichprobe bei n_p zu bestimmenden Parametern darstellt.

Für die mit Hilfe des Zugversuchs bzw. des Biegeversuchs an der geraden Biegeprobe ermittelten einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurven können als Vergleichswerte die zu ausgewählten Dehnungen gehörenden Spannungen gewählt werden. Dagegen stehen für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe als Vergleichswerte lastschrittweise Meßwerte \hat{M} des aufgetragenen Biegemomentes und die Bedingung der Längskraft-Freiheit des Vier-Punkt-Biegeversuchs $\hat{N} = 0$ zur Verfügung. Um einheitliche physikalische Größen mit Zahlenwerten von etwa gleicher Größenordnung zu erhalten, wurden die gemessenen und berechneten Biegemomente mittels Division durch das Widerstandsmoment bei starr-idealplastischem Verhalten in das *bezogene Biegemoment*

$$\sigma_M = \frac{M}{\frac{1}{4} b h^2} \quad (4.18)$$

sowie die berechnete Längskraft mittels Division durch den Flächeninhalt in die *bezogene Längskraft*

$$\sigma_N = \frac{N}{b h} \quad (4.19)$$

umgerechnet.

4.3 Optimierungsverfahren

Die beste Anpassung des Modells $y = y(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ an die Meßwerte $\hat{\mathbf{y}}$ wird erreicht, wenn die Zielfunktion ein Minimum annimmt:

$$\Phi(\mathbf{p}) = (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}}) \rightarrow \min \quad (4.20)$$

Der zugehörige optimale Parametervektor möge mit \mathbf{p}^* bezeichnet werden.

Zusätzlich können auch Nebenbedingungen (*Restriktionen*) an die zu identifizierenden Parameter gestellt werden. So muß z.B. für die Konstanten b_1 und b_3 in den Ansätzen für die kinematische Verfestigung nach *Prager* (2.39) bzw. *Armstrong* und *Frederick* (2.41)

$$b_1 > 0 \quad \text{und} \quad b_3 > 0$$

gelten. Im Kontext der Parameteridentifikation erscheint es aber durchaus sinnvoll, nur das unrestringierte Problem zu lösen. Bei zutreffender Wahl des Modells und ausreichender Genauigkeit der Meßwerte werden die physikalisch begründeten Restriktionen von allein erfüllt. Sollte andererseits eine Restriktion nicht automatisch erfüllt werden, kann dies als sicherer Hinweis auf einen mehr oder weniger systematischen Fehler im Materialmodell, im Experiment oder in der numerischen Simulation gelten.

Für das Vorliegen eines Minimums der Zielfunktion sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen [22]:

- Notwendige Optimalitätsbedingung:
Falls die Zielfunktion $\Phi(\mathbf{p}) : \mathcal{R}^{n_p} \rightarrow \mathcal{R}$ in einer offenen konvexen Menge $D \subset \mathcal{R}^{n_p}$ stetig differenzierbar ist und in $\mathbf{p}^* \in D$ ein lokales Minimum von Φ vorliegt, ist der Gradient der Zielfunktion bezüglich der Parameter Null:

$$\nabla \Phi(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \tag{4.21}$$

- Hinreichende Optimalitätsbedingung:
Falls die Zielfunktion $\Phi(\mathbf{p}) : \mathcal{R}^{n_p} \rightarrow \mathcal{R}$ in einer offenen konvexen Menge $D \subset \mathcal{R}^{n_p}$ zweifach stetig differenzierbar ist, und neben der notwendigen Bedingung (4.21) für die Matrix der zweiten Ableitungen der Zielfunktion nach den Parametern gilt:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{p}^*) \quad \text{ist positiv definit,} \tag{4.22}$$

liegt in \mathbf{p}^* ein lokales Minimum vor.

Die zur Lösung von Identifikationsproblemen häufig eingesetzten Optimierungsstrategien lassen sich grob in zwei Klassen aufteilen:

- gradientenbasierte (deterministische) Verfahren und
- gradientenfreie Verfahren (stochastische Methoden, Evolutionsstrategien).

Bei den gradientenbasierten Verfahren wird unter Nutzung der ersten und teilweise auch der zweiten Ableitungen der Zielfunktion nach den Parametern eine Folge von Iterierten des Parametervektors mit sinkendem Zielfunktionswert konstruiert. Die Optimalitätsbedingung (4.21) kann dabei als Abbruchkriterium verwendet werden, vgl. Gl. (4.45). Diese Vorgehensweise ist an die Verfügbarkeit eines effektiven Algorithmus zur Berechnung der benötigten Ableitungen und an die Bedingung gebunden, daß die Zielfunktion genügend oft stetig differenzierbar bzw. im numerischen Sinne genügend glatt ist.

Gradientenfreie Methoden haben den Vorteil, daß lediglich ein Algorithmus zur Berechnung des Funktionswertes der Zielfunktion benötigt wird. Dieser wird für anfänglich zufällig gewählte Parametersätze bestimmt. Mit Hilfe sogenannter Evolutionsstrategien ist

es möglich, durch geschickte Kombination und Variation von Parametersätzen mit guten Zielfunktionswerten eine neue Generation von Parametersätzen zu gewinnen. Die mehrfache Anwendung des Verfahrens erzeugt wiederum eine Folge von Parametersätzen mit sinkenden Zielfunktionswerten [31, 60, 68]. Da keine Berechnung der Gradienten erfolgt, ist die Überprüfung der Optimalitätsbedingungen (4.21) bzw. (4.22) nicht möglich. Entscheidender Nachteil der gradientenfreien Verfahren ist jedoch, daß zu ihrer Realisierung eine Vielzahl von Funktionswertberechnungen, in der Regel mindestens einige Tausend [31], erforderlich ist. Es kann jedoch andererseits von Vorteil sein, daß keine Forderungen bezüglich der Glattheit des Modells zu erfüllen sind.

Da ein effizienter Algorithmus zur Berechnung der benötigten Ableitungen zur Verfügung steht (siehe Abschnitt 4.4), werden ausschließlich deterministische Optimierungsverfahren angewendet.

Einen Überblick zu den gradientenbasierten Lösungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme enthalten z. B. [12, 22, 33, 38, 50, 64, 66]. Die im weiteren angegebene Darstellung folgt im wesentlichen *Dennis* und *Schnabel* [22].

Die bei der Identifikation von Materialparametern bevorzugte Auswertung der Fehlerquadratsumme kann als Minimierung der L_2 -Norm eines Residuums $\mathbf{r}(\mathbf{p})$ zwischen den berechneten und den gemessenen Vergleichswerten aufgefaßt werden [22]:

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}} \quad \text{mit} \quad r_i(\mathbf{p}) = y_i(\mathbf{p}) - \hat{y}_i \quad (4.23)$$

wobei sowohl \mathbf{r} als auch \mathbf{y} Operatoren (bzw. Vektorfunktionen) darstellen, die den n_p -dimensionalen Raum der Parameter auf den n -dimensionalen Raum der Vergleichswerte abbilden ($n \geq n_p$). Die Zielfunktion nimmt damit die Form

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{p}) \mathbf{r}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\mathbf{p}) \rightarrow \min \quad (4.24)$$

an.²

Die Matrix der ersten Ableitungen der Vektorfunktion \mathbf{r} nach dem Vektor \mathbf{p} der unabhängigen Variablen heißt *Jacobi-Matrix* oder *Jacobian* \mathbf{J} mit

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \{J_{ij}(\mathbf{p})\} = \left\{ \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \right\} \quad (4.25)$$

wobei

$$\nabla \mathbf{r}^T(\mathbf{p}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{p}) \quad (4.26)$$

gilt. Für den Gradienten der Zielfunktion nach Gleichung (4.24) ergibt sich

$$\nabla \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{p}) \mathbf{r}(\mathbf{p}) \quad (4.27)$$

²Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird häufig verwendet, um eine einfachere Darstellung der ersten und zweiten Ableitungen zu erhalten.

Die Matrix der zweiten Ableitungen der skalaren Funktion Φ nach dem Vektor \mathbf{p} der unabhängigen Variablen heißt *Hesse-Matrix* oder *Hessian* \mathbf{H} mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \nabla^2 \Phi(\mathbf{p}) = \{H_{jk}(\mathbf{p})\} = \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_j \partial p_k} \right\} \quad (4.28)$$

Für den *Hessian* der Zielfunktion nach Gleichung (4.24) gilt

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \nabla^2 \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\mathbf{p}) + \mathbf{S}(\mathbf{p}) \quad (4.29)$$

wobei $\mathbf{J}^T(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\mathbf{p})$ nur Informationen über die ersten Ableitungen des Residuums enthält, während die Anteile in den zweiten Ableitungen des Residuums in

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 r_i(\mathbf{p})}{\partial p_j \partial p_k} \quad (4.30)$$

enthalten sind.

Vermittelt das Modell zur Bestimmung der berechneten Vergleichswerte y eine in den Parametern lineare Abbildung, d. h., falls gilt

$$y = y(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n_p} f_j(\mathbf{x}) \cdot p_j \quad (4.31)$$

liegt eine *lineare Optimierungsaufgabe* vor. Dann besitzt der Vektor der berechneten Vergleichswerte die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{p} \quad (4.32)$$

wobei \mathbf{X} eine Matrix der Dimension $[n \times n_p]$ darstellt, in der die j -te Spalte die Funktionswerte der Ansatzfunktion f_j für alle betrachteten Zustände \mathbf{x}_i enthält:

$$\mathbf{X} = \{X_{ij}\} = \{f_j(\mathbf{x}_i)\} \quad (4.33)$$

Die Lösung des *linearen Fehlerquadratminimum-Problems*

$$\frac{1}{2} (\mathbf{X} \mathbf{p} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{X} \mathbf{p} - \hat{\mathbf{y}}) \rightarrow \min \quad (4.34)$$

kann aus einem linearen Gleichungssystem, dem sogenannten *Normalgleichungssystem*

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{p} = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{y}} \quad (4.35)$$

berechnet werden. Die Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit. Falls die Spalten von \mathbf{X} linear unabhängig sind, ist $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ nichtsingulär und damit invertierbar. Die Lösung

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{y}} \quad (4.36)$$

ist dann eindeutig.

Für *nichtlineare* Optimierungsprobleme existiert eine ganze Reihe von iterativen Lösungsverfahren, die alle dem Grundgedanken nachgehen, eine Folge von Parametervektoren

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \alpha \mathbf{s}^k \quad (4.37)$$

mit sinkendem Zielfunktionswert zu erzeugen. Das einfachste dieser *Abstiegsverfahren* ist das *Gradientenverfahren*, in dem die Suchrichtung \mathbf{s}^k als Richtung des negativen Gradienten der Zielfunktion

$$\mathbf{s}^k = -\nabla \Phi(\mathbf{p}^k) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{p}^k) \mathbf{r}(\mathbf{p}^k) \quad (4.38)$$

gewählt und die Schrittweite α so bestimmt wird, daß sich ein möglichst großer Abstieg ergibt. Das Gradientenverfahren ist linear konvergent, konvergiert jedoch in der Nähe der Lösung nur sehr langsam.

Im *Newton-Verfahren* wird die Abstiegsrichtung aus dem quadratischen Modell der Zielfunktion

$$\Phi^k(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}^k) + \nabla \Phi(\mathbf{p}^k)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^k)^T \nabla^2 \Phi(\mathbf{p}^k) (\mathbf{p} - \mathbf{p}^k) \quad (4.39)$$

an der Stelle der aktuellen Iterierten des Parametervektors \mathbf{p}^k zu

$$\mathbf{s}^k = \left(\nabla^2 \Phi(\mathbf{p}^k) \right)^{-1} \left(-\nabla \Phi(\mathbf{p}^k) \right) \quad (4.40)$$

bestimmt. Zur Berechnung von \mathbf{s}^k ist die Kenntnis der Matrix der zweiten Ableitungen gemäß Gl. (4.29) notwendig.

Speziell für die nichtlineare Fehlerquadratapproximation hat sich das *Gauß-Newton-Verfahren* bewährt. Hierbei wird für den Residuenvektor \mathbf{r} die lineare Näherung

$$\mathbf{r}^k(\mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{p}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{p}^k) (\mathbf{p} - \mathbf{p}^k) \quad (4.41)$$

angesetzt. Die Suchrichtung ergibt sich dann zu

$$\mathbf{s}^k = \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{p}^k) \mathbf{J}(\mathbf{p}^k) \right)^{-1} \left(-\nabla \Phi(\mathbf{p}^k) \right) \quad (4.42)$$

wobei die im *Newton-Verfahren* (4.40) verwendete vollständige Hesse-Matrix durch deren Anteil $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ in den ersten Ableitungen angenähert wird.

Das *Gauß-Newton-Verfahren* ist für nichtlineare Fehlerquadratminimum-Probleme mit nicht verschwindendem Residuum ebenfalls nur linear konvergent, jedoch in der Nähe der Lösung wesentlich effektiver als das Gradientenverfahren. Bei ungünstigen Startwerten kann jedoch eine schlechte Konvergenz auftreten, so daß sich gegebenenfalls eine Dämpfung durch geeignete Wahl des Vorfaktors α erforderlich macht [66].

Eine andere Möglichkeit besteht darin, dem *Gauß-Newton-Verfahren* am Beginn der Berechnung das global konvergente Gradientenverfahren vorzuschalten. Nach diesem Prinzip arbeitet das *Levenberg-Marquardt-Verfahren* [49, 54], in dem die Suchrichtung aus

$$\mathbf{s}^k = \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{p}^k) \mathbf{J}(\mathbf{p}^k) + \mu \mathbf{I} \right)^{-1} \left(-\nabla \Phi(\mathbf{p}^k) \right) \quad (4.43)$$

berechnet und μ so bestimmt wird, daß \mathbf{s}^k innerhalb eines Vertrauensbereiches (engl. “trust region”) mit

$$\|\mathbf{s}^k\| \leq \delta \quad (4.44)$$

liegt. Fern der Lösung ergeben sich große Werte für μ , so daß das *Gradientenverfahren* überwiegt. Im Laufe der Berechnung wird μ verkleinert, so daß der Iterationsprozeß in der Nähe der Lösung in das *Gauß-Newton-Verfahren* übergeht [64, 66].

Bei den vorgenommenen Berechnungen wurde ausschließlich das *Levenberg-Marquardt-Verfahren* angewendet, wobei als Abbruchkriterium die Bedingung

$$\|\nabla \Phi\| < \text{tol} \quad (4.45)$$

geprüft wird.

Durch die beschriebenen Optimierungsverfahren werden grundsätzlich *lokale* Minima berechnet. Für die Entscheidung, ob es sich dabei um das gewünschte *globale* Minimum handelt, sind verschiedene Strategien denkbar:

- In der Regel werden mehrere Optimierungsrechnungen mit verschiedenen Startwerten ausgeführt. Sollte eine größere Anzahl davon auf dasselbe (kleinste) Minimum führen, kann dieses als globales Optimum angesehen werden.
- Alle lokalen Minima, für die eine Approximationsgüte erreicht wird, die dem Meßfehler der zu approximierenden Versuchsergebnisse entspricht, sind als gleichberechtigte optimale Lösungen anzusehen.

4.4 Sensitivitätsanalyse

Die Aufgabe der Sensitivitätsanalyse besteht in der Bestimmung von Ableitungen als Maß für die Empfindlichkeit der zu untersuchenden Größen gegenüber Parameteränderungen [28, 29, 43]. Diese gehen direkt in die zur Lösung des Optimierungsproblems verwendeten Verfahren ein (s. Abschnitt 4.3).

Die Zielfunktion Φ kann sowohl explizit als auch implizit über den Vektor der berechneten Vergleichswerte \mathbf{y} von den Materialparametern \mathbf{p} abhängig sein:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}(\mathbf{p})) \quad (4.46)$$

so daß der Gradient der Zielfunktion aus

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{p}} \quad (4.47)$$

zu bestimmen ist. Während die partiellen Ableitungen $\partial \Phi / \partial \mathbf{p}$ und $\partial \Phi / \partial \mathbf{y}$ der Zielfunktion im allgemeinen leicht bestimmt werden können, besteht die eigentliche Schwierigkeit in der Berechnung der Ableitungen $d\mathbf{y} / d\mathbf{p}$ der Vergleichswerte nach den Materialparametern.

Die berechneten Vergleichswerte stellen im hier betrachteten Identifikationsproblem eine Untermenge des Vektors \mathbf{z} der unbekannten Variablen bzw. Zustandsgrößen des elasto-plastischen Deformationsgesetzes dar:

$$\mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda)^T \quad (4.48)$$

Die Sensitivitätsanalyse kann sowohl mit analytischen, numerischen oder auch semi-analytischen Methoden erfolgen [28, 50]. Da im vorliegenden Fall die Vergleichsgrößen wegen der Nichtlinearität des Deformationsgesetzes numerisch im Ergebnis eines Iterationsprozesses bestimmt werden müssen, scheidet die direkte analytische Berechnung der benötigten Ableitungen von vornherein aus.

Die numerische Sensitivitätsanalyse besteht in der näherungsweisen Bestimmung des Gradienten durch Berechnung von Differenzenquotienten für jeweils einen Parameter p_j :

$$\frac{d\Phi}{dp_j} \approx \frac{\Phi(p_j + \Delta p_j) - \Phi(p_j)}{\Delta p_j} \quad (4.49)$$

Für die Bestimmung des Gradienten bezüglich eines n_p -dimensionalen Parametervektors \mathbf{p} sind somit n_p zusätzliche Berechnungen des Wertes der Zielfunktion notwendig, was zu einer starken Vergrößerung des Rechenaufwandes führt. Weiterhin bestimmt die geeignete Wahl der Parameteränderungen Δp_j die Genauigkeit des berechneten Gradienten. Wird eine zu kleine Parameteränderung gewählt, kann es zum Genauigkeitsverlust durch Auslöschung führender Ziffernstellen kommen. Bei zu großen Parameteränderungen wird hingegen ein Näherungswert ermittelt, der dem mittleren Wert der Ableitung im Intervall $[p_j, p_j + \Delta p_j]$ entspricht. Da die Ableitungen über \mathbf{J} bzw. $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ in den Optimierungsalgorithmus eingehen, kann die Anwendung der numerischen Sensitivitätsanalyse zur Instabilität des Optimierungsverfahrens führen.

Eine sehr effiziente Methode zur Bestimmung des Gradienten $d\mathbf{z}/d\mathbf{p}$ der Zustandsgrößen nach den Materialparametern stellt die Anwendung der impliziten analytischen Differentiation dar, wie sie von *Mahnken* und *Stein* [51, 52], *Gelin* und *Ghouati* [32] sowie *Bohnsack* [16] verwendet wurde. Die prinzipielle Vorgehensweise wird im folgenden am Beispiel des hier untersuchten Identifikationsproblems erläutert.

Das nichtlineare Gleichungssystem \mathbf{G} des zeitlich diskretisierten Deformationsgesetzes (4.4) kann sowohl explizit als auch implizit über die Zustandsvektoren $\mathbf{z}_{n-1}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{z}_n(\mathbf{p})$ zweier aufeinanderfolgender Lastschritte vom Parametervektor \mathbf{p} abhängig sein:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_n(\mathbf{p}), \mathbf{z}_{n-1}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

Aus dem totalen Differential

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{z}_n} \frac{d\mathbf{z}_n}{d\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{z}_{n-1}} \frac{d\mathbf{z}_{n-1}}{d\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

ergeben sich die gesuchten Ableitungen $d\mathbf{z}_n/d\mathbf{p}$ als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{z}_n} \right) \frac{d\mathbf{z}_n}{d\mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{z}_{n-1}} \frac{d\mathbf{z}_{n-1}}{d\mathbf{p}} \right) \quad (4.52)$$

Hierin bedeuten

- $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{z}_n$ die Systemmatrix (4.8) des aktuellen Lastschrittes im ausiterierten Zustand,
- $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{p}$ die partielle Ableitung des Gleichungssystems (4.4) nach den Parametern

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{p}} = \left(\lambda_n \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{p}}, -\lambda_n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \quad (4.53)$$

wobei die hierin enthaltenen materialspezifischen partiellen Ableitungen der Fließbedingung und der Evolutionsgleichungen zusätzlich in der Materialbibliothek bereitzustellen sind,

- $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{z}_{n-1}$ die partielle Ableitung des Gleichungssystems (4.4) nach dem Zustandsvektor des vorhergehenden Lastschritts

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{z}_{n-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

- und $d\mathbf{z}_{n-1}/d\mathbf{p}$ die aus dem vorhergehenden Lastschritt bekannten Ableitungen des Zustandsvektors nach den Parametern.

Mit der Anfangsbedingung

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{d\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

für einen unbelasteten oder rein elastischen Anfangszustand ergeben sich die Ableitungen $d\mathbf{z}_n/d\mathbf{p}$ für den aktuellen Lastschritt aus denen des vorhergehenden Lastschritts durch Lösung des linearen Gleichungssystems (4.52), wobei für jeden Parameter eine neue rechte Seite zu bilden ist. Die Systemmatrix $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{z}_n$ liegt aus der *Newton*-Iteration des zeitlich diskretisierten Deformationsgesetzes (4.4) bereits in faktorisierte Form vor, so daß die Berechnung der Ableitungen keinen wesentlichen Mehraufwand bedeutet. Dabei ist es jedoch notwendig, die Ableitungen des gesamten Zustandsvektors nach den Materialparametern zu berechnen, obwohl für die Optimierung der verwendeten Zielfunktion nur die Ableitungen der Spannungen benötigt werden.

Da die hier vorgestellte Form der Sensitivitätsanalyse einerseits auf der impliziten analytischen Differentiation beruht, andererseits die Systemmatrix von (4.52) Ergebnis eines numerischen Prozesses ist, kann sie den semianalytischen Methoden zugeordnet werden. Sie stellt eine interne, in den Integrationsalgorithmus des Deformationsgesetzes eingebettete Sensitivitätsanalyse dar. Die Ableitungen werden dabei mit derselben Genauigkeit berechnet wie die Funktionswerte. Die verwendete semianalytische Sensitivitätsanalyse ist damit wesentlich effektiver und genauer als eine numerische Sensitivitätsanalyse. Die Sensitivitätsanalyse mit Hilfe der impliziten analytischen Differentiation kann auf die Bestimmung der zweiten Ableitungen erweitert werden, s. *Mahnken* und *Stein* [52] sowie *Mahnken* [53].

Parameter p	Zielfkt.-wert Φ	$\Delta\Phi/\Delta p$ (numerisch)	$d\Phi/dp$ (semianalyt.)
479	4388,592	-1,454	-1,839
479,9	4387,249	-1,11	-1,146
479,99	4387,149	-1,1	-1,076
479,999	4387,139	-1	-1,069
480,000	4387,138		-1,068
480,001	4387,137	-1	-1,068
480,01	4387,127	-1,1	-1,061
480,1	4387,035	-1,03	-0,991
481	4386,455	-0,683	-0,298

Tabelle 4.1: *Vergleich der Ergebnisse der numerischen und der semianalytischen Sensitivitätsanalyse anhand eines Beispiels*

Abschließend soll in Tabelle 4.1 noch ein Vergleich von Ergebnissen der numerischen und der semianalytischen Sensitivitätsanalyse anhand eines während einer Optimierungsrechnung aufgetretenen Beispiels angegeben werden, wobei zur besseren Lesbarkeit die Ergebnisse an geeigneter Stelle gerundet wurden.

In der zweiten Spalte sind die zu den Parameterwerten der ersten Spalte gehörenden Zielfunktionswerte aufgeführt. Für den Parameter $p = 480$ wurde der Zielfunktionswert $\Phi = 4387,138$ und mit der semianalytischen Sensitivitätsanalyse der Wert der Ableitung $d\Phi/dp = -1,068$ berechnet.

Die dritte Spalte enthält wiederum für $p = 480$ die sich bei Anwendung der numerischen Sensitivitätsanalyse für $\Delta p = \pm 0,001$, $\pm 0,01$, $\pm 0,1$ und ± 1 ergebenden Werte der Ableitung. Der Effekt der Auslöschung geltender Ziffernstellen bei zu kleinen Schrittweiten Δp sowie zunehmender Ungenauigkeit bei zu großen Schrittweiten Δp ist deutlich zu erkennen.

In der vierten Spalte sind die zu den Parameterwerten der ersten Spalte gehörenden, mit der semianalytischen Methode berechneten Ableitungen aufgeführt, welche sämtlich die gleiche Anzahl geltender Ziffernstellen aufweisen. Der Vergleich mit den numerisch bestimmten Ableitungen für größere Δp zeigt, daß diese dem mittleren Anstieg der Zielfunktion im Intervall $[p, p + \Delta p]$ entsprechen.

4.5 Parameterschätzung

Die in den Abschnitten 4.2 und 4.3 dargestellten Überlegungen gehen davon aus, daß ein eindeutiges Minimum der Zielfunktion gefunden wird, und damit der optimale Parametersatz ebenfalls eindeutig fixiert ist. Wird hingegen zusätzlich in Rechnung gestellt, daß

jede Messung naturgemäß mit Meßfehlern behaftet ist, ergibt sich die Frage nach der Vertrauenswürdigkeit oder *Konfidenz* der berechneten Parameter in Abhängigkeit von der Genauigkeit der betrachteten Messungen. Im Ergebnis einiger bereits durchgeführter Optimierungsrechnungen wurde weiterhin beobachtet, daß es offenbar Abhängigkeiten oder *Korrelationen* der Parameter untereinander gibt, wenn diese gleichermaßen in der Lage sind, einen beobachteten physikalischen Effekt zu beschreiben.

Die Aufgabenstellung der Parameteridentifikation unter Berücksichtigung des stochastischen Charakters der Meßwerte wird als *Parameterschätzung* oder auch *Regression* bezeichnet. Dabei wird das in Gl. (4.9) angegebene Modell $y(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ einer Vergleichsgröße an Meßwerte \hat{y}_i angepaßt. Falls das Modell linear in den Parametern \mathbf{p} ist, handelt es sich um eine *lineare Regression*, siehe z. B. bei *Brandt* [19] und *Pokropp* [62]. Bei vielen naturwissenschaftlichen und technischen Problemen besteht das Modell aus Differentialgleichungssystemen, deren Lösungen häufig nichtlinear in den Parametern sind, so daß eine *nichtlineare Regressionsaufgabe* vorliegt, siehe z. B. bei *Bates* und *Watts* [9], *Beck* und *Arnold* [10], *Eykhoff* [30] sowie *Seber* und *Wild* [67]. Anwendungen auf das Problem der Parameterschätzung für inelastisches Materialverhalten sind in [2], [55] und [72] enthalten.

Im Rahmen der Regressionsanalyse wird im allgemeinen davon ausgegangen, daß das Modell "korrekt" ist und nur relativ kleine Abweichungen zwischen den Meßwerten und den berechneten Werten auftreten [9, 10]. Weiterhin wird häufig vorausgesetzt, daß die "kontrollierten" unabhängigen Variablen \mathbf{x} keine Fehler enthalten, und somit das Modell frei von zufälligen Einflüssen ist. Die Abweichungen der Meßwerte von den mit Hilfe des Modells berechneten Vergleichswerten werden dann als "Fehler" mit entsprechenden statistischen Eigenschaften interpretiert.

Im folgenden werden die *Fehlerquadratminimum-Schätzung* und die *Gauß-Markov-Schätzung* für lineare Modelle sowie deren Erweiterung auf nichtlineare Modelle beschrieben. Dabei wird auf die bei *Beck* und *Arnold* [10] angegebenen Ausführungen Bezug genommen.

a) *Fehlerquadratminimum-Schätzung* für ein in den Parametern lineares Modell:

Unter den Voraussetzungen

- die Fehler ϵ_i sind additiv, d. h., der Meßwert stellt die Summe aus berechnetem Wert und Fehler dar: $\hat{y}_i = y_i + \epsilon_i$,
- die Fehler ϵ_i haben den Erwartungswert Null, d. h., es liegt kein systematischer Fehler vor,
- die Fehler ϵ_i haben die gleiche unbekannte Varianz σ^2 ,
- die Fehler ϵ_i sind untereinander nicht korreliert,
- die unabhängigen Variablen \mathbf{x} sind fehlerfrei und
- die Parameter \mathbf{p} sind konstant,

ist

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{y}} \quad (4.56)$$

eine unverzerzte, d. h. erwartungstreue Schätzung des Parametervektors \mathbf{p} . Die Kovarianzmatrix lautet dann

$$\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{p}^*) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (4.57)$$

wobei als Schätzwert für die Varianz σ^2 der Fehler

$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n - n_p} \quad (4.58)$$

verwendet werden kann. Dabei stellen \mathbf{X} die Matrix der Funktionswerte der Ansatzfunktionen gemäß (4.33), n die Anzahl der Meßwerte und n_p die Anzahl der freien Parameter dar.

Die Fehlerquadratminimum-Schätzung ist anzuwenden, wenn die Varianz der Fehler unbekannt ist, jedoch vorausgesetzt werden kann, daß diese für jeden Meßwert die gleiche Größe besitzt.

Die bereits im Abschnitt 4.3 aufgeführte Lösung (4.36) des linearen Fehlerquadratmittel-Problems stellt gemäß (4.56) zusätzlich eine erwartungstreue Schätzung des Parametervektors dar. Zu beachten ist, daß für die Herleitung der Beziehungen (4.56) - (4.58) keine Voraussetzungen über die Art der Verteilung der Fehler notwendig sind [10]. Werden die Fehler als normalverteilt angenommen, ist die Fehlerquadratminimum-Schätzung gleichzeitig eine *Maximum-Likelihood-Schätzung*, und es lassen sich Konfidenzbereiche zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten berechnen [10, 19].

Die Kovarianzmatrix \mathbf{P} besteht aus dem Anteil $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, durch den die Form des Konfidenzbereichs festgelegt wird, sowie der multiplikativen Konstanten σ^2 , welche die Größe des Konfidenzbereichs steuert. Der Konfidenzbereich stellt ein Ellipsoid im n_p -dimensionalen Parameterraum dar, wobei Länge und Richtung der Halbachsen des Ellipsoids den Eigenwerten bzw. Eigenvektoren der Kovarianzmatrix entsprechen, vgl. z. B. Brandt [19]. Alle auf der Oberfläche des Ellipsoids befindlichen Parametervektoren realisieren für lineare Modelle den gleichen Zielfunktionswert.

b) *Gauß-Markov-Schätzung* für ein in den Parametern lineares Modell:

Unter den Voraussetzungen

- die Fehler sind additiv: $\hat{y}_i = y_i + \epsilon_i$,
- die Fehler ϵ_i haben den Erwartungswert Null,
- die Kovarianzmatrix Ψ der Fehler ϵ_i ist bis auf eine multiplikative Konstante σ^2 bekannt: $\Psi = \sigma^2 \Omega$,
- die unabhängigen Variablen \mathbf{x} sind fehlerfrei und
- die Parameter \mathbf{p} sind konstant,

ist

$$\mathbf{p}^* = \left(\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \Omega^{-1} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.59)$$

eine erwartungstreue Schätzung des Parametervektors \mathbf{p} . Die Kovarianzmatrix lautet dann

$$\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{p}^*) = \sigma^2 \left(\mathbf{X}^T \Omega^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \quad (4.60)$$

wobei als Schätzwert für die Varianz σ^2 der Fehler

$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T \Omega^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n - n_p} \quad (4.61)$$

verwendet werden kann. Wird zusätzlich vorausgesetzt, daß die Fehler normalverteilt sind, ist die Schätzung gemäß Gl. (4.59) eine *Maximum-Likelihood-Schätzung*.

Die *Gauß-Markov-Schätzung* kann dann angewendet werden, wenn zur Bestimmung der Materialparameter Versuche mit unterschiedlicher Meßgenauigkeit oder unterschiedliche Vergleichsgrößen herangezogen werden sollen. Wird weiterhin von unkorrelierten Messungen ausgegangen, nimmt die Matrix $\mathbf{\Omega}$ Diagonalform an.

Die gleichzeitige Auswertung zweier Versuche, wobei die Varianzen der Fehler z. B. aus der Fehlerquadratminimum-Schätzung der einzelnen Versuche bekannt sind, stellt die einfachste Anwendung der *Gauß-Markov-Schätzung* dar. Der Parameterschätzer nach Gl. (4.59) besteht dann aus einer mit dem Kehrwert der Varianzen gewichteten Fehlerquadratsumme, so daß Meßwerte mit größerer Streuung nur mit einem kleineren Gewicht, solche mit kleinerer Streuung mit einem größeren Gewicht berücksichtigt werden. Die *Gauß-Markov-Schätzung* hat den zusätzlichen Vorteil, daß die untersuchten Vergleichswerte auf dimensionslose Größen normiert werden können, so daß die gleichzeitige Berücksichtigung von Meßwerten unterschiedlicher physikalischer Dimension (z. B. Verschiebungen, Spannungen, Kräfte, Momente) bei der Parameterbestimmung möglich ist.

c) *Fehlerquadratminimum-Schätzung* für ein in den Parametern nichtlineares Modell:

Hier ist zunächst mit einem der im Abschnitt 4.3 aufgeführten numerischen Verfahren der optimale Parametersatz \mathbf{p}^* für das nichtlineare Fehlerquadratminimum-Problem

$$\Phi(\mathbf{p}) = (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}}) \rightarrow \min \quad (4.62)$$

zu bestimmen. Gelten die unter a) aufgeführten Voraussetzungen, kann die Kovarianzmatrix aus dem linearisierten Modell im Lösungspunkt

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}^*) + \mathbf{J}(\mathbf{p}^*) (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) \quad (4.63)$$

näherungsweise zu

$$\mathbf{P} = cov(\mathbf{p}^*) \approx \sigma^2 \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{p}^*) \mathbf{J}(\mathbf{p}^*) \right)^{-1} \quad (4.64)$$

bestimmt werden, wobei als Schätzwert für die Varianz σ^2 wiederum

$$s^2 \approx \frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n - n_p} \quad (4.65)$$

verwendet werden kann.

Die Kovarianzmatrix (4.64) für das nichtlineare Modell gilt streng genommen nur für dessen linearisierte Näherung (4.63) und hat denselben Aufbau wie die Kovarianzmatrix (4.57) bei Zugrundelegung eines linearen Modells. Während \mathbf{X} beim linearen Modell unabhängig von \mathbf{p} ist, muß dagegen für nichtlineare Modelle der Jacobian \mathbf{J} nach Gl. (4.25) an der Stelle des optimalen Parametervektors \mathbf{p}^* berechnet werden.³ Damit beschreibt

³ Beck und Arnold [10] verwenden sowohl für lineare als auch nichtlineare Modelle die gleiche Bezeichnung Sensitivitätsmatrix \mathbf{X}

$J^T J$ eine lokale Eigenschaft der Zielfunktion, nämlich gerade die *Gauß-Newton*-Näherung des Hessians im Lösungspunkt \mathbf{p}^* . Die mit Hilfe von (4.64) bestimmten Konfidenzbereiche sind wiederum Ellipsoide. Für Parametervektoren auf der Oberfläche des Ellipsoids ergeben sich aber nunmehr unterschiedliche Funktionswerte der nichtlinearen Fehlerquadratfunktion. Außerdem ist es nicht mehr möglich, den Konfidenzbereichen eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

Analog zum Vorgehen bei der Fehlerquadratminimum-Schätzung kann auch die *Gauß-Markov*-Schätzung auf in den Parametern nichtlineare Modelle übertragen werden.

d) *Gauß-Markov-Schätzung* für ein in den Parametern nichtlineares Modell:

Die optimale Lösung \mathbf{p}^* ist iterativ aus der Zielfunktion

$$\Phi(\mathbf{p}) = (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{y}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{y}}) \rightarrow \min \quad (4.66)$$

zu ermitteln. Gelten die unter b) angegebenen Voraussetzungen, können die Kovarianzmatrix näherungsweise aus dem linearisierten Modell (4.63) zu

$$\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{p}^*) \approx \sigma^2 \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{p}^*) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{p}^*) \right)^{-1} \quad (4.67)$$

und der Näherungswert s^2 der Varianz wiederum aus (4.61) berechnet werden.

Die jeweiligen Kovarianzmatrizen \mathbf{P} enthalten die gesuchten Aussagen über die Konfidenzbereiche der Parameter und die Korrelationskoeffizienten der Parameter untereinander. Hierbei ist zu beachten, daß die im folgenden beschriebenen Aussagen für nichtlineare Modelle nur Näherungen darstellen.

Die Diagonalelemente $P_{(jj)}$ ⁴ der Kovarianzmatrix $\mathbf{P} = \{P_{jk}\}$ stellen Schätzwerte für die Varianzen der entsprechenden Parameter dar:

$$\sigma^2(p_j) \approx P_{(jj)} \quad (4.68)$$

Damit können Konfidenzintervalle der Parameter zu

$$\text{konf}(p_j) = \left[p_j^* - \sqrt{P_{(jj)}}, p_j^* + \sqrt{P_{(jj)}} \right] \quad (4.69)$$

definiert werden. Der durch die Konfidenzintervalle (4.69) definierte Quader im Parameterraum hüllt das Konfidenzellipsoid ein.

Weiterhin kann die Korrelationsmatrix $\mathbf{R} = \{R_{jk}\}$ über die Bildungsvorschrift

$$R_{jk} = \frac{P_{jk}}{\sqrt{P_{(jj)} P_{(kk)}}} \quad (4.70)$$

berechnet werden. Für die Hauptdiagonalelemente gilt $R_{(jj)} = 1$ und die Nebendiagonalelemente, welche die Korrelation der Parameter untereinander beschreiben, erfüllen die Ungleichung $-1 \leq R_{jk} \leq +1$. Falls bestimmte R_{jk} Werte nahe bei +1 annehmen, liegt

⁴Um Mißverständnisse zu vermeiden, wird von der in der Tensorrechnung üblichen Notation Gebrauch gemacht.

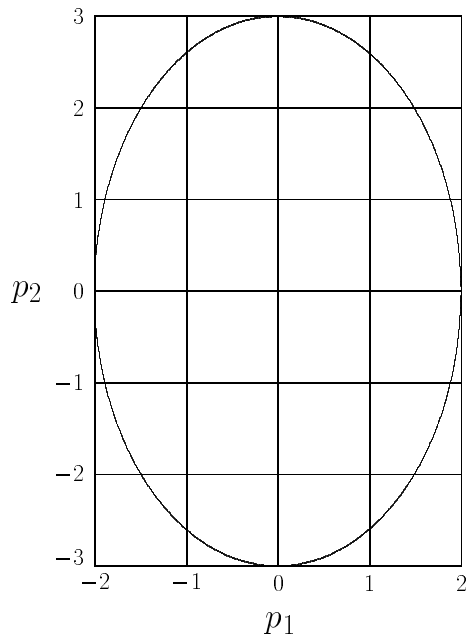


Bild 4.1: Konfidenzellipse für $R_{12} = 0$
 $p_1^* = p_2^* = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$

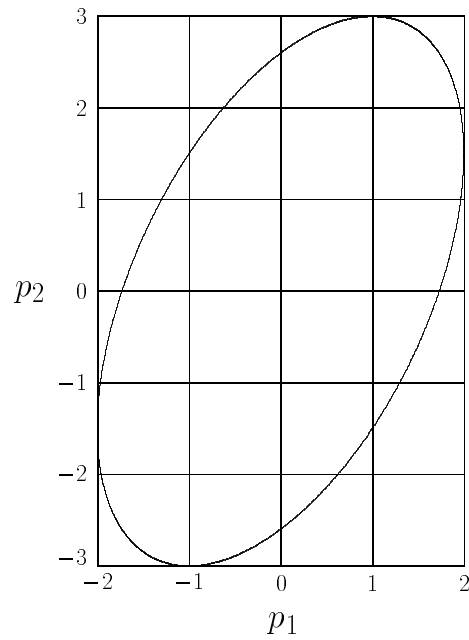


Bild 4.2: Konfidenzellipse für $R_{12} = 0,5$
 $p_1^* = p_2^* = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$

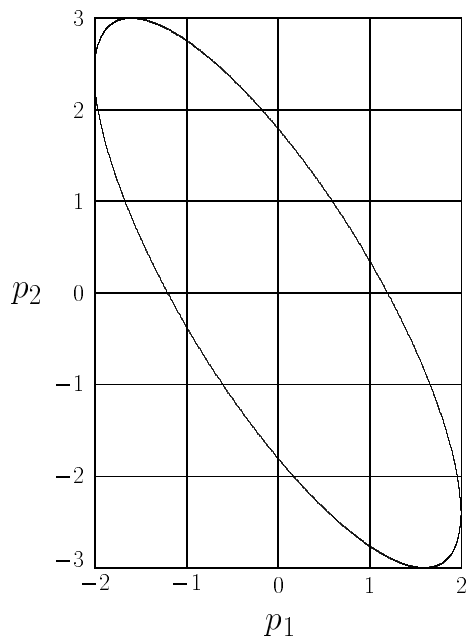


Bild 4.3: Konfidenzellipse für $R_{12} = -0,8$
 $p_1^* = p_2^* = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$

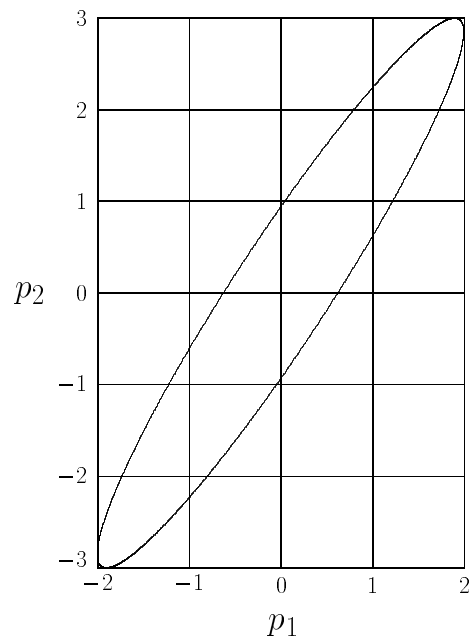


Bild 4.4: Konfidenzellipse für $R_{12} = 0,95$
 $p_1^* = p_2^* = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$

positive Korrelation vor, d. h. mit noch geeignet zu bestimmenden Konstanten k_1 und k_2 gilt

$$p_j \approx k_1 p_k + k_2 \quad \text{mit} \quad k_1 > 0 \quad (4.71)$$

Für Werte von R_{jk} nahe bei -1 dagegen liegt *negative Korrelation* vor, d. h.

$$p_j \approx k_1 p_k + k_2 \quad \text{mit} \quad k_1 < 0 \quad (4.72)$$

Beispiele für Konfidenzellipsen in Abhängigkeit von zwei Parametern p_1 und p_2 sind in den Bildern 4.1 bis 4.4 dargestellt. Um diese einfacher vergleichen zu können, wurden in allen vier Bildern dieselben Werte der optimalen Parameter $p_1^* = p_2^* = 0$ und der Varianzen $\sigma_1 = 2$ bzw. $\sigma_2 = 3$ gewählt.

Die Kovarianzellipsen liegen immer innerhalb des durch die Konfidenzintervalle (4.69) definierten Rechtecks und berühren dieses in vier Punkten. Für $R_{12} = 0$ ergibt sich eine Ellipse, deren Hauptachsen in Richtung der Parameterachsen verlaufen. Gilt zusätzlich $\sigma_1 = \sigma_2$, ergibt sich ein Kreis. Je größer der Betrag von R_{12} ist, desto schlanker wird die Kovarianzellipse, deren Hauptachsen sich gleichzeitig in Richtung der Diagonalen des einhüllenden Rechtecks drehen. Für $R_{12} = \pm 1$ entartet die Kovarianzellipse zu einer Geraden in Richtung einer der beiden Diagonalen dieses Rechtecks.

4.6 Multikriterielle Zielfunktionen

Im Gegensatz zu Aufgabenstellungen, in denen nur ein einziges Kriterium zur Bestimmung der Modellparameter herangezogen wird, führt die Berücksichtigung mehrerer unterschiedlicher Optimierungsziele auf ein *multikriterielles* Optimierungsproblem [29, 64]. Die Bezeichnungen *Mehrzieloptimierung* und *Vektoroptimierung* sind alternativ gebräuchlich.

Bei Betrachtung mehrerer unterschiedlicher Zielfunktionen existiert im allgemeinen kein Lösungsvektor, der alle Zielfunktionen gleichzeitig minimiert. Die Verbesserung des Wertes einer der Zielfunktionen ist daher mit der Verschlechterung einer oder mehrerer anderer Zielfunktionswerte verbunden. Um trotzdem eine einheitliche optimale Lösung zu erhalten, ist die Konstruktion einer skalarwertigen *multikriteriellen* Zielfunktion notwendig. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß für unterschiedliche Teilzielfunktionen im allgemeinen verschiedene Werte der Anpassungsgüte zu verzeichnen sind.

Eine naheliegende Methode der Konstruktion einer multikriteriellen Zielfunktion besteht darin, eine Linearkombination der Teilzielfunktionen

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k w_i \Phi_i(\mathbf{p}) \quad (4.73)$$

zu bilden, wobei die $w_i \geq 0$ noch geeignet zu wählende Gewichtungsfaktoren darstellen [29, 64].

Im allgemeinen steht für jeden Versuch eine unterschiedliche Anzahl von Meß- bzw. Vergleichswerten zur Verfügung. Soll jeder Versuch den gleichen Einfluß auf das Optimierungsergebnis besitzen, ist die entsprechende Teilzielfunktion durch die Anzahl der Vergleichswerte zu teilen:

$$w_i = \frac{1}{n_i} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \Phi_i(\mathbf{p}) \quad (4.74)$$

Wenn ein Versuch unter gleichen Bedingungen mehrfach ausgeführt wird, so daß von der gleichen Varianz der Meßfehler ausgegangen werden kann, können alle Wichtungsfaktoren Eins gesetzt werden:

$$w_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(\mathbf{p}) \quad (4.75)$$

Würde ein solches Kriterium jedoch auf Teilzielfunktionen mit unterschiedlicher Anpassungsgüte angewendet werden, ist damit zu rechnen, daß die Approximationsfehler der Versuche mit schlechterer Anpassungsgüte auf die Versuche mit besserer Anpassungsgüte übertragen werden. Um diesem Effekt vorzubeugen, ist es besser, Teilzielfunktionen mit schlechterer Approximationsgüte einen geringeren Wichtungsfaktor zuzuordnen als Teilzielfunktionen mit besserer Approximationsgüte. Als Wichtungsfaktoren können dann z. B. die reziproken Schätzwerte der beobachteten Standardabweichung

$$w_i = \frac{1}{s_i} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{s_i} \Phi_i(\mathbf{p}) \quad (4.76)$$

bzw. die reziproken Schätzwerte der Varianz für die jeweilige Teilzielfunktion

$$w_i = \frac{1}{s_i^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{s_i^2} \Phi_i(\mathbf{p}) \quad (4.77)$$

verwendet werden. Die zuletzt beschriebene multikriterielle Zielfunktion entspricht der *Gauß-Markov*-Schätzung, vgl. Gl. (4.66).

Eine weitere allgemeine Methode der Mehrzieloptimierung besteht darin, zuerst die zu den Teilzielfunktionen Φ_i gehörenden teilloptimalen Lösungen \mathbf{p}_i^* zu ermitteln und danach die relativen Abweichungen der Funktionswerte der Teilzielfunktionen bei multikriterieller Optimierung gegenüber den teilloptimalen Zielfunktionswerten zu minimieren, s. *Rao* [64]. Dies kann entweder für die Summe der relativen Abweichungen

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \frac{\Phi_i(\mathbf{p}) - \Phi_i(\mathbf{p}_i^*)}{\Phi_i(\mathbf{p}_i^*)} \quad (4.78)$$

oder aber für deren Quadratsumme

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \left[\frac{\Phi_i(\mathbf{p}) - \Phi_i(\mathbf{p}_i^*)}{\Phi_i(\mathbf{p}_i^*)} \right]^2 \quad (4.79)$$

erfolgen.

Andere in der Literatur [29, 64] beschriebene Möglichkeiten zur Konstruktion einer multikriteriellen Zielfunktion erschienen für das vorliegende Identifikationsproblem nicht zweckmäßig. Da weiterhin die Auswahl der geeigneten Zielfunktion problemabhängig ist und somit dem Anwender überlassen bleibt, werden im Abschnitt 5.5 die Zielfunktionen (4.74) bis (4.79) getestet.

Kapitel 5

Ergebnisse der Parameteridentifikation

5.1 Anfangs-Fließortkurve

Eine wichtige Teilaufgabe bei der Beschreibung des Deformationsgesetzes besteht in der Bestimmung der Anfangs-Fließortkurve. Diese kennzeichnet für ein bis dahin lediglich elastisch beanspruchtes Material die Gesamtheit aller Spannungszustände an der Elastizitätsgrenze. Gleichzeitig definiert diese Fließortkurve die Anfangswerte der Spannungen und inneren Variablen für die Integration des plastischen Teildeformationsgesetzes bei der Erstbelastung.

Bei der Auswahl der zu verwendenden Fließbedingung ist zu beachten, daß einerseits das experimentell untersuchte Walzblech orthotropes plastisches Materialverhalten aufweist, andererseits die Meßwerte der Fließspannungen sowie der Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit nur für einachsige Spannungszustände in bzw. quer zur Walzrichtung in der Blechebene vorliegen, s. Bild 5.1.

Somit erschien es zweckmäßig, eine *quadratische* Fließbedingung zu verwenden, während die Berücksichtigung von Ausdrücken höherer Ordnung wegen der geringen Datenbasis von vornherein ausschied.

Bei quadratischen Fließbedingungen stellt der Fließkörper im Spannungsraum ein Hyperellipsoid dar. Die Fließbedingung (2.12)

$$\frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij}) (s_{ij} - \alpha_{ij}) - \sigma_F^2 = 0$$

erlaubt die Berücksichtigung der kinematischen Verfestigung, welche eine Verschiebung des Mittelpunktes des Fließkörpers bewirkt. Die Fließbedingung nach *Baltov* und *Sawczuk* (2.6)

$$(s_{ij} - \alpha_{ij}) N_{ijkl} (s_{kl} - \alpha_{kl}) - \sigma_F^2 = 0$$

gestattet zusätzlich die Berücksichtigung formativer Verfestigung, welche sich in Streckungen bzw. Stauchungen sowie Drehungen des Fließkörpers äußert.

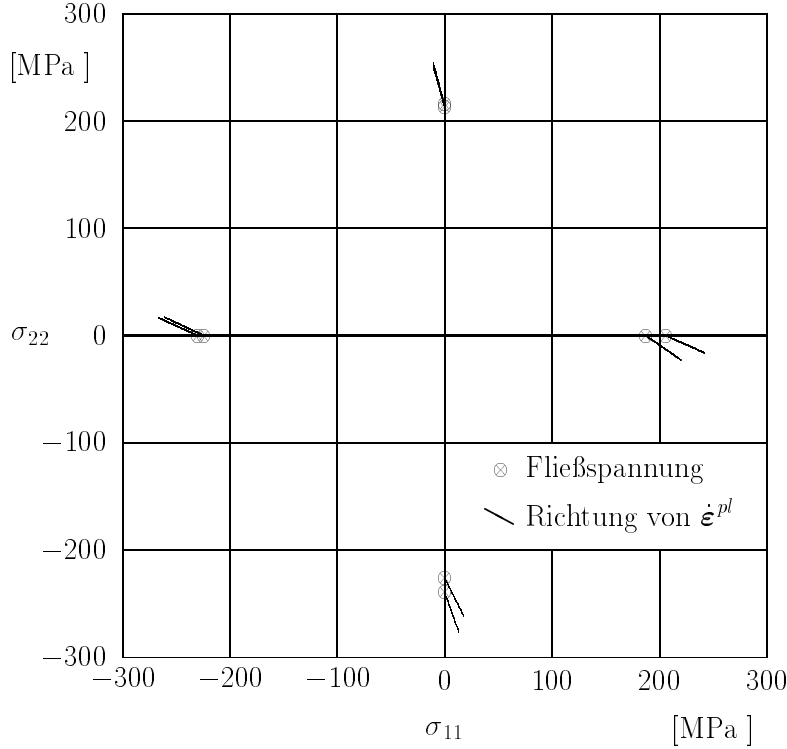


Bild 5.1: Meßwerte der Fließspannungen und der Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit, nach [18]

Da die vorliegenden Meßwerte der Fließspannungen jeweils auf der Druckseite dem Betrage nach größer sind als auf der Zugseite, ist von einer kinematischen Verschiebung des Fließkörpers bereits im Ausgangszustand auszugehen. Ob zusätzlich auch Streckungen bzw. Drehungen vorliegen, kann nur anhand der Ergebnisse der Approximation der Anfangs-Fließortkurve beurteilt werden.

Die mittels einer quadratischen Fließbedingung nach Gl. (2.12) bzw. (2.6) entstehenden Fließellipsen im ebenen Hauptspannungsraum lassen sich als Kurven zweiter Ordnung darstellen, deren allgemeine Form

$$F(\sigma_{11}, \sigma_{22}) = A \sigma_{11}^2 + B \sigma_{11} \sigma_{22} + C \sigma_{22}^2 + D \sigma_{11} + E \sigma_{22} + F = 0 \quad (5.1)$$

lautet [20]. Hierin bezeichnen die Konstanten A, \dots, F noch zu bestimmende Parameter der Anfangs-Fließortkurve, aus denen die Anfangswerte der inneren Variablen des plastischen Teildeformationsgesetzes berechnet werden können.

Falls die Konstanten A, \dots, F bekannt sind, können mit Hilfe einer Koordinatentransformation (siehe [20]) die fünf geometrischen Bestimmungsstücke der Fließellipse

- Koordinaten σ_{11}^M und σ_{22}^M des Mittelpunktes,
- Länge der Halbachsen a und b sowie

– Winkel β zwischen großer Halbachse und σ_{11} -Achse

berechnet werden, so daß eine grafische Darstellung der Fließellipse mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{11}^M + a \cos \beta \cos \varphi - b \sin \beta \sin \varphi \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^M + a \sin \beta \cos \varphi + b \cos \beta \sin \varphi\end{aligned}\quad (5.2)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$

möglich ist.

Wegen der Homogenität von Gleichung (5.1) kann eine der Konstanten frei gewählt werden, z. B. $B = -1$. Zusätzlich wird das Vorzeichen von F negativ gesetzt, so daß (5.1) die Form

$$F(\sigma_{11}, \sigma_{22}) = A \sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + C \sigma_{22}^2 + D \sigma_{11} + E \sigma_{22} - F = 0 \quad (5.3)$$

annimmt.

Das Ziel der folgenden Berechnungen besteht nunmehr darin, eine Anfangs-Fließortkurve, welche die Meßwerte nach Bild 5.1 möglichst gut approximiert, zu konstruieren. Wird der Abstand zwischen den gemessenen und den berechneten Fließspannungen über Spannungsdifferenzen ausgedrückt, entsteht ein in den Parametern A, \dots, F nichtlineares Approximationsproblem. Andererseits treten diese Parameter in der Fließbedingung als multiplikative Konstanten und somit linear auf. Daher ergibt die Forderung, daß die Werte der Fließfunktion für die gemessenen Fließorte $\hat{\sigma}_i$ im Sinne der Fehlerquadratminimierung nahe Null liegen sollen

$$\Phi^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_i [F(\hat{\sigma}_i)]^2 \rightarrow \min \quad (5.4)$$

ein lineares Approximationsproblem zur Bestimmung der Parameter A, C, D, E und F der Anfangs-Fließortkurve.

Aus der Optimalitätsbedingung (4.21) für $\Phi^{(1)}$ folgt als *Normalgleichungssystem* entsprechend (4.35)

$$\begin{pmatrix} [\hat{\sigma}_{11}^4] & [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\sigma}_{22}^2] & [\hat{\sigma}_{11}^3] & [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\sigma}_{22}] & -[\hat{\sigma}_{11}^2] \\ [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\sigma}_{22}^2] & [\hat{\sigma}_{22}^4] & [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^2] & [\hat{\sigma}_{22}^3] & -[\hat{\sigma}_{22}^2] \\ [\hat{\sigma}_{11}^3] & [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^2] & [\hat{\sigma}_{11}^2] & [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}] & -[\hat{\sigma}_{11}] \\ [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\sigma}_{22}] & [\hat{\sigma}_{22}^3] & [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}] & [\hat{\sigma}_{22}^2] & -[\hat{\sigma}_{22}] \\ -[\hat{\sigma}_{11}^2] & -[\hat{\sigma}_{22}^2] & -[\hat{\sigma}_{11}] & -[\hat{\sigma}_{22}] & [1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\hat{\sigma}_{11}^3 \hat{\sigma}_{22}] \\ [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^3] \\ [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{\sigma}_{22}] \\ [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}^2] \\ -[\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22}] \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

wobei $[t]$ die *Gaußsche* Summe $[t] = \sum_i t_i$, d. h. die Summe des in den eckigen Klammern

enthaltenen Terms für alle Meßwerte, bedeutet.

Solange nur Meßwerte für die Zug- und Druckfließspannungen in Richtung der Orthotropieachsen x_1 und x_2 in der Blechebene bekannt sind, besitzt die Matrix von (5.5) den Rang 4 und das Gleichungssystem ist unterbestimmt.¹ Um diesem Mangel abzuhelfen, wurde die Einbeziehung der Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit, welche den Normalenrichtungen an die Fließfläche entsprechen, in den Algorithmus zur Approximation der Anfangs-Fließortkurve vorgesehen. Die Forderung, daß die approximierten und die gemessenen *Normaleneinheitsvektoren* \mathbf{n} bzw. $\hat{\mathbf{n}}$ im Sinne der Fehlerquadratminimierung für die L_2 -Norm möglichst gut übereinstimmen, führt auf

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_i \|\mathbf{n}(\hat{\sigma}_i) - \hat{\mathbf{n}}_i\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \left[(n_1(\hat{\sigma}_i) - \hat{n}_{i1})^2 + (n_2(\hat{\sigma}_i) - \hat{n}_{i2})^2 \right] \rightarrow \min\end{aligned}\quad (5.6)$$

welches ebenfalls ein lineares Approximationsproblem darstellt. Die Länge des Differenzvektors der Normaleneinheitsvektoren $\mathbf{n} - \hat{\mathbf{n}}$ entspricht für kleine Abweichungen näherungsweise der Bogenlänge am Einheitskreis, so daß durch Gl. (5.6) die Winkeldifferenzen zwischen den gemessenen und berechneten Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeit minimiert werden.

Aus der Optimalitätsforderung für $\Phi^{(2)}$ folgt als Normalgleichungssystem

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} \hat{n}_2^2] - 2 [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{n}_1 \hat{n}_2] \\ 2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1^2] - 2 [\hat{\sigma}_{22}^2 \hat{n}_1 \hat{n}_2] \\ [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_2^2] - [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_1 \hat{n}_2] \\ [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_1^2] - [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1 \hat{n}_2] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

mit $(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) =$

$$= \begin{pmatrix} 4 [\hat{\sigma}_{11}^2 \hat{n}_2^2] & -4 [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & 2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_2^2] & -2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & [0] \\ -4 [\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & 4 [\hat{\sigma}_{22}^2 \hat{n}_1^2] & -2 [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & 2 [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1^2] & [0] \\ 2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_2^2] & -2 [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & [\hat{n}_2^2] & -[\hat{n}_1 \hat{n}_2] & [0] \\ -2 [\hat{\sigma}_{11} \hat{n}_1 \hat{n}_2] & 2 [\hat{\sigma}_{22} \hat{n}_1^2] & -[\hat{n}_1 \hat{n}_2] & [\hat{n}_1^2] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Da in $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$ die jeweils fünfte Spalte und Zeile Null sind, können aus (5.7), (5.8) nur die vier Konstanten A, C, D und E bestimmt werden. Erst die Kombination der beiden Zielfunktionen nach Gl. (5.4) und (5.6) zu einer multikriteriellen Zielfunktion

¹Dies gilt auch bei wiederholten Experimenten.

$$\Phi = \gamma_1 \Phi^{(1)} + \gamma_2 \Phi^{(2)} \rightarrow \min \quad (5.9)$$

erlaubt die Bestimmung aller fünf Parameter der Anfangs-Fließortkurve, wobei wiederum ein lineares Approximationsproblem erhalten wird. Um für $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ direkt vergleichbare dimensionslose Werte zu erhalten, wurden die Spannungen mittels Division durch eine charakteristische Spannung, welche gleich dem geometrischen Mittel der gemessenen Fließspannungen gewählt wurde, normiert.

Da alle verwendeten Meßwerte zweifach vorliegen, ist es möglich, Schätzwerte für die Varianzen der Fließspannungen und der Richtungen der plastischen Deformationsgeschwindigkeiten anzugeben. Eine befriedigende Approximation der Meßwerte wurde bei der Wahl von

$$\Phi = \frac{1}{s^2(\boldsymbol{\sigma})} \Phi^{(1)} + \frac{1}{s^2(\boldsymbol{n})} \Phi^{(2)} \quad (5.10)$$

erhalten.

Aus den auf diese Weise berechneten Parametern A, C, D, E und F der Anfangs-Fließortkurve lassen sich die Anfangswerte der Koordinaten N_{1111}, N_{1122} und N_{2222} des vierstufigen Distorsionstensors \mathbf{N} , der kinematischen Rückspannungen α_{11} und α_{22} sowie der Fließspannung σ_F ermitteln.

Bei Anwendung der Fließbedingung nach *Baltov* und *Sawczuk* (2.6) ergibt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie- und Inkompressibilitätsbedingungen (2.7) - (2.10) das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A &= N_{1111_0} \\ B &= 2 N_{1122_0} \\ C &= N_{2222_0} \\ D &= N_{1111_0} (-4 \alpha_{11_0} - 2 \alpha_{22_0}) + N_{1122_0} (-2 \alpha_{11_0} - 4 \alpha_{22_0}) \\ E &= N_{1122_0} (-4 \alpha_{11_0} - 2 \alpha_{22_0}) + N_{2222_0} (-2 \alpha_{11_0} - 4 \alpha_{22_0}) \\ F &= \sigma_{F_0}^2 - N_{1111_0} (4 \alpha_{11_0}^2 + 4 \alpha_{11_0} \alpha_{22_0} + \alpha_{22_0}^2) - \\ &\quad - N_{1122_0} (4 \alpha_{11_0}^2 + 10 \alpha_{11_0} \alpha_{22_0} + 4 \alpha_{22_0}^2) - N_{2222_0} (\alpha_{11_0}^2 + 4 \alpha_{11_0} \alpha_{22_0} + 4 \alpha_{22_0}^2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

welches auf Grund seiner speziellen Struktur in drei lineare Untersysteme zerfällt. Die Anfangswerte der inneren Variablen können unter Beachtung von $B = -1$ mittels

$$\begin{aligned} N_{1111_0} &= A \\ N_{1122_0} &= -0,5 \\ N_{2222_0} &= C \\ \alpha_{11_0} &= \frac{D(1 - 4C) + 2E(A - 1)}{12AC - 3} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\alpha_{22_0} = \frac{E(1-4A) + 2D(C-1)}{12AC-3}$$

$$\sigma_{F_0}^2 = F + (4A+C-2) \alpha_{11_0}^2 + (4A+4C-5) \alpha_{11_0} \alpha_{22_0} + (A+4C-2) \alpha_{22_0}^2$$

berechnet werden.

Bei Verwendung der Fließbedingung nach Gl. (2.12) gelten $A = N_{1111_0} = 1$ und $C = N_{2222_0} = 1$, so daß nur noch die Konstanten D, E und F zu bestimmen sind. Das Gleichungssystem (5.5) reduziert sich damit auf

$$\begin{pmatrix} [\hat{\sigma}_{11}^2] & [\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}] & -[\hat{\sigma}_{11}] \\ [\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}] & [\hat{\sigma}_{22}^2] & -[\hat{\sigma}_{22}] \\ -[\hat{\sigma}_{11}] & -[\hat{\sigma}_{22}] & [1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\hat{\sigma}_{11}^2\hat{\sigma}_{22}] - [\hat{\sigma}_{11}^3] - [\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}^2] \\ [\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}^2] - [\hat{\sigma}_{11}^2\hat{\sigma}_{22}] - [\hat{\sigma}_{22}^3] \\ [\hat{\sigma}_{11}^2] + [\hat{\sigma}_{22}^2] - [\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}] \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

und von Gl. (5.7), (5.8) verbleibt

$$\begin{pmatrix} [\hat{n}_2^2] & -[\hat{n}_1\hat{n}_2] & [0] \\ -[\hat{n}_1\hat{n}_2] & [\hat{n}_1^2] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\hat{\sigma}_{22}\hat{n}_2^2] - [\hat{\sigma}_{11}\hat{n}_1\hat{n}_2] - 2[\hat{\sigma}_{11}\hat{n}_2^2] + 2[\hat{\sigma}_{22}\hat{n}_1\hat{n}_2] \\ [\hat{\sigma}_{11}\hat{n}_1^2] - [\hat{\sigma}_{22}\hat{n}_1\hat{n}_2] + 2[\hat{\sigma}_{11}\hat{n}_1\hat{n}_2] - 2[\hat{\sigma}_{22}\hat{n}_1^2] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Für die vorhandenen Meßwerte ist das Gleichungssystem (5.13) regulär, während aus Gl. (5.14) nur die Konstanten D und E berechnet werden können. Die Verwendung der multikriteriellen Zielfunktion nach Gl. (5.10) führt wiederum auf ein reguläres Gleichungssystem für die drei verbliebenen Parameter D, E und F .

Die Anfangswerte der Rückspannungen und der Anfangsfließspannung können dann aus

$$\alpha_{11_0} = -\frac{1}{3} D$$

$$\alpha_{22_0} = -\frac{1}{3} E \quad (5.15)$$

$$\sigma_{F_0}^2 = F + 3 \left(\alpha_{11_0}^2 + \alpha_{11_0} \alpha_{22_0} + \alpha_{22_0}^2 \right)$$

bestimmt werden.

Die Ergebnisse der für die beiden vorgestellten Varianten erfolgten Berechnung sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Bild 5.2 enthält die grafische Darstellung der zugehörigen Anfangs-Fließortkurven.

Fließbedingung	N_{ijkl_0}	α_{ij_0}	σ_{F_0}
nach Gl. (2.12)	$N_{1111_0} = 1$ (fest) $N_{1122_0} = -0,5$ (fest) $N_{2222_0} = 1$ (fest)	$\alpha_{11_0} = -8,3$ MPa $\alpha_{22_0} = -3,2$ MPa	$\sigma_{F_0} = 218,3$ MPa
nach Gl. (2.6)	$N_{1111_0} = 1,100$ $N_{1122_0} = -0,5$ (fest) $N_{2222_0} = 1,055$	$\alpha_{11_0} = -7,9$ MPa $\alpha_{22_0} = -2,9$ MPa	$\sigma_{F_0} = 226,4$ MPa

Tabelle 5.1: Anfangswerte der Koordinaten des Distorsionstensors, der Rückspannungen und der Fließspannung

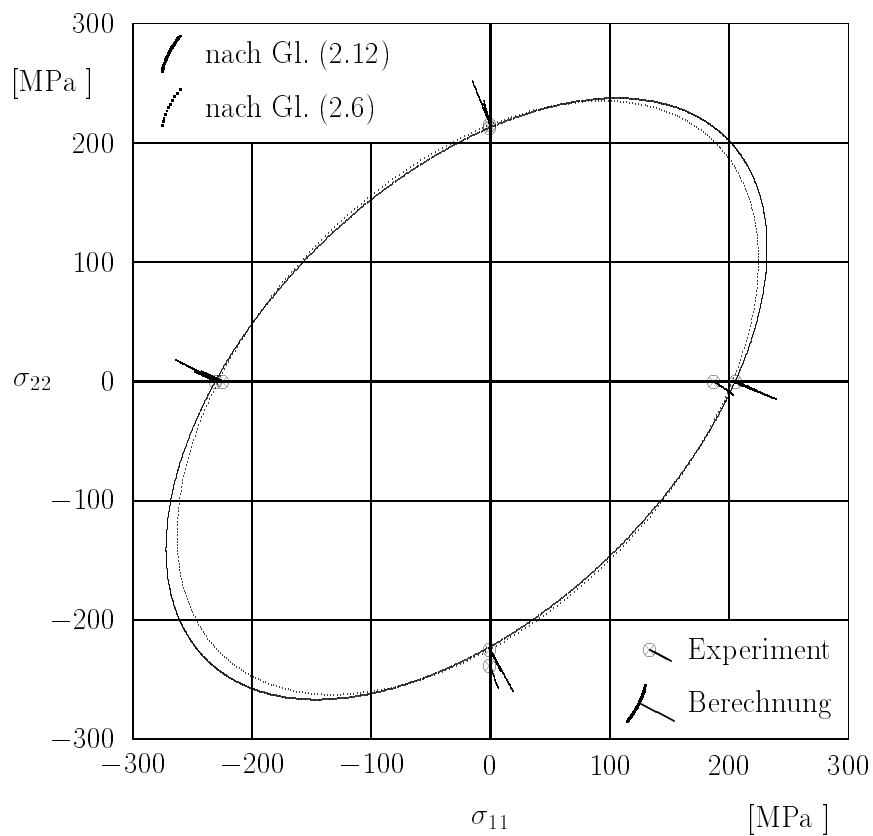


Bild 5.2: Approximierte Anfangs-Fließortkurven

Die approximierten Fließellipsen für die Fließbedingungen nach Gl. (2.12) und Gl. (2.6) weisen nahezu gleiche Anfangswerte der Rückspannungen sowie relativ geringe Abweichungen bezüglich der Halbachsenverhältnisse und des Neigungswinkels auf.

Für die Parameteridentifikation aus den Meßergebnissen des Biegeversuchs an der gekerbten Probe und der Zugversuche (s. Abschnitte 5.3 - 5.5) hat sich die Verwendung der Fließbedingung nach Gl. (2.12) als ausreichend erwiesen. Dagegen führte die Approximation der Spannungs-Dehnungs-Kurven aus dem Biegeversuch an geraden Biegeproben für beide Varianten auf unbefriedigende Ergebnisse, s. Abschnitt 5.6.

5.2 Synthetische Meßwerte

In einem frühen Bearbeitungsstadium wurden die Algorithmen zur Integration des Deformationsgesetzes sowie zur Parameteridentifikation mit Hilfe "synthetischer Meßwerte", d. h. unter Vorgabe der Anfangs- und Randbedingungen sowie eines bestimmten Materialmodells *berechneter* Werte, getestet.

Dazu wurde mit Hilfe des FEM-Programms "PMEP" [56] der Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe simuliert. Das Materialmodell bestand aus der Fließbedingung (2.12), isotroper Verfestigung entsprechend dem Potenzansatz sowie kinematischer Verfestigung nach *Prager*. Die elastischen Konstanten und die Anfangswerte der Fließspannung sowie der Rückspannungen wurden entsprechend den bis dahin ermittelten experimentellen Befunden gewählt und als bekannt vorausgesetzt. Für einen der experimentell untersuchten Belastungsgeschichte ähnlichen Lastpfad wurden die Verzerrungen im Ligament sowie die für die Parameteridentifikation realer Meßwerte vorgesehenen Vergleichswerte (bezogenes Biegemoment σ_M , bezogene Längskraft σ_N , Spannungen σ_K in den Kerbgründen) lastschrittweise berechnet [35]. Anschließend wurde mit dem eigenen Programm "parid" versucht, die in der FEM-Simulation verwendeten Verfestigungsparameter zu identifizieren.

Einige Ergebnisse der Optimierungsrechnung bei Einbeziehung unterschiedlicher Merkmale in die Zielfunktion sind in Tabelle 5.2 zusammenfassend dargestellt. Die drei ersten Zeilen enthalten die mit Hilfe des eigenen Programms identifizierten Parameter einschließlich der mittleren quadratischen Abweichung der jeweiligen Vergleichswerte aus "PMEP" und "parid". In der vierten Zeile sind die Verfestigungsparameter der FEM-Simulation aufgeführt, während in der letzten Zeile der Wert der mittleren quadratischen Abweichung für eine "parid"-Vorwärtsrechnung mit den exakten Parametern angegeben ist.

Die Parameter der isotropen Verfestigung a_1 und a_3 werden in den drei angegebenen Optimierungsrechnungen recht genau wiedergefunden, weniger gut jedoch die *Prager*-Konstante b_1 . Die mittlere quadratische Abweichung \bar{s} zwischen den synthetischen Meßwerten und den zu den identifizierten Parametern gehörenden Vergleichswerten besitzt in allen drei Fällen nahezu den gleichen Wert von etwa 1 MPa, welcher sogar kleiner als der Wert beim Vergleich der beiden Vorwärtsrechnungen ist. Daher sind die Abweichungen in den Parametern hauptsächlich durch den Diskretisierungsfehler beider Programme bestimmt, und die angegebenen Parametersätze sind im Sinne des jeweils verwendeten Vergleichskriteriums als gleichwertig anzusehen.

Weiterhin kann geschlußfolgert werden, daß die Parameter nicht als eindeutig fixierte Größen identifiziert werden können, sondern lediglich als *Vertrauens-* oder *Konfidenz-*

Zielfunktion enthält	a_1 MPa	a_3	b_1 MPa	\bar{s} MPa
σ_M, σ_N	608	0,252	684	1,073
$\sigma_M, \sigma_N, \sigma_K$ (nur Zug für Belastung)	595	0,246	787	1,042
$\sigma_M, \sigma_N, \sigma_K$ (Zug und Druck für Belastung)	609	0,252	745	1,046
Vorwärtsrechnung "PMEP"	600	0,250	750	–
Vorwärtsrechnung "parid" für σ_M und σ_N	600	0,250	750	1,151

Tabelle 5.2: *Parameteridentifikation aus synthetischen Meßwerten, gekerbte Biegeprobe, Potenzansatz*

bereiche innerhalb des betrachteten Parameterraumes, für die die Zielfunktion Werte nahe dem Optimalwert annimmt. Weiterhin ist zu beobachten, daß die Werte der Parameter nicht unabhängig voneinander geändert werden können. So zieht eine Verringerung von a_1 eine Vergrößerung von b_1 nach sich, so daß von *Korrelationen* zwischen den Parametern auszugehen ist.

In der weiteren Bearbeitung der Aufgabenstellung wurde daher zielgerichtet nach Möglichkeiten zur näherungsweisen Beschreibung der Konfidenzbereiche der Parameter und der Korrelationen der Parameter untereinander gesucht. Die theoretischen Grundlagen dazu wurden bereits im Abschnitt 4.5 dargestellt.

Bild 5.3 enthält die synthetischen Meßwerte und die für die optimalen Parameter berechneten Vergleichswerte des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Längskraft, wobei aufgrund der sehr kleinen mittleren quadratischen Abweichung visuell kein Unterschied feststellbar ist.

Die Verläufe des bezogenen Biegemomentes σ_M und der bezogenen Normalkraft σ_N stimmen für die vier angegebenen Parametersätze überein, während bezüglich der aus den einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurven entnommenen Kerbspannungen nur dann eine gute Approximation erhalten wird, wenn diese in die Zielfunktion einbezogen werden.

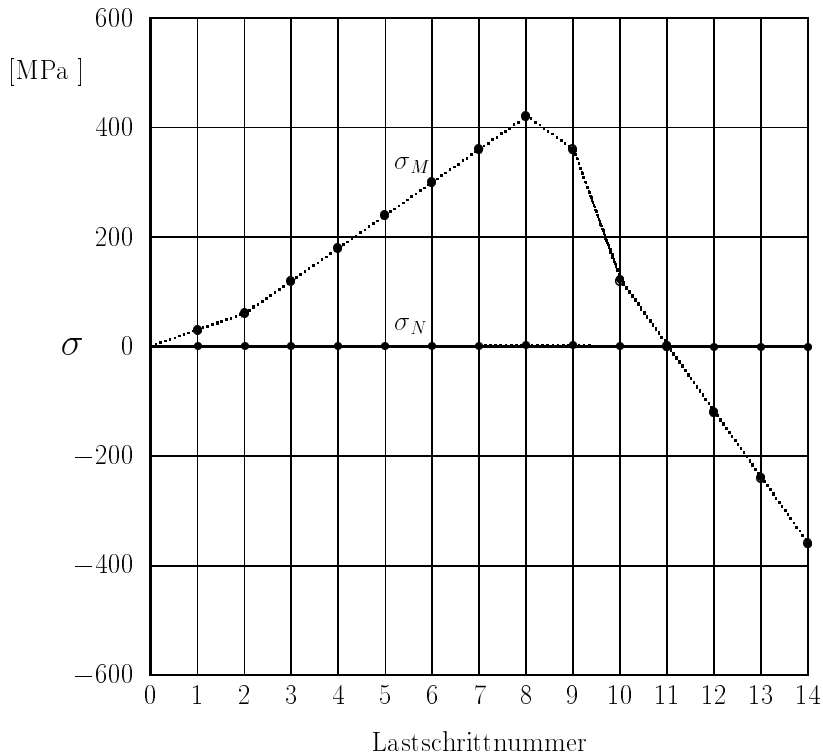


Bild 5.3: *Synthetische Meßwerte und zu optimalen Parametern gehörende berechnete Vergleichswerte des bezogenen Biegemomentes σ_M und der bezogenen Längskraft σ_N*

5.3 Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe

Als Ergebnis der Auswertung des Biegeversuchs an der gekerbten Biegeprobe stehen die Verzerrungskordinaten ε_{11} und ε_{22} in 45 Punkten entlang des Ligaments für 14 Lastschritte zur Verfügung. Die mit Hilfe der punktwweisen Integration des Deformationsgesetzes berechneten Spannungen werden anschließend durch numerische Integration über den Querschnitt zu den Schnittgrößen Biegemoment und Längskraft zusammengefaßt und in die zugehörigen bezogenen Schnittgrößen nach Gl. (4.18) und (4.19) umgerechnet. Das *bezogene Biegemoment* σ_M und die *bezogene Längskraft* σ_N sind damit nach Größe und Dimension direkt mit den ebenfalls zu untersuchenden einachsigen Zug- und Druckspannungen vergleichbar.

Die elastischen Konstanten wurden entsprechend Abschnitt 3.1, die Anfangswerte der inneren Variablen für die Fließbedingung (2.12) nach Tabelle 5.1 vorgegeben. Die Parameteridentifikation wurde für die isotrope Verfestigung nach dem modifizierten Potenzansatz (2.36), dem *arctan*-Ansatz (2.37) oder dem Exponentialansatz (2.38) unter Einbeziehung der kinematischen Verfestigung nach *Prager* (2.30) vorgenommen. Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 für den Potenzansatz, ein Vergleich der Resultate für alle drei Ansätze der isotropen Verfestigung folgt im Abschnitt 5.3.3.

Zu allen Optimierungsrechnungen wurden ein Berechnungsprotokoll, welches neben den Eingabedaten und den Endergebnissen auch Angaben zum Optimierungsverlauf enthält,

sowie Diagramme zur grafischen Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Vergleichsgrößen erzeugt. Um diese Ausdrücke eindeutig zu kennzeichnen, wurde jede Optimierungsrechnung mit einer internen siebenstelligen Kenn-Nummer versehen.

5.3.1 Berücksichtigung aller Lastschritte

Die Messungen der Verschiebungsfelder an der gekerbten Biegeprobe wurden für alle vierzehn Lastschritte unter den gleichen Versuchsbedingungen ausgeführt und auf die im Abschnitt 3.4 beschriebene Weise weiterverarbeitet. Daher sind alle Lastschritte vorerst als gleichwertig anzusehen. Die Zielfunktion enthält die Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Vergleichswerten des bezogenen Biegemomentes σ_M und der bezogenen Längskraft σ_N mit jeweils gleichem Gewichtungsfaktor.

Ausgehend von unterschiedlichen Startwerten wurden für den Potenzansatz die in Tabelle 5.3 angegebenen Lösungen erhalten.

Kenn-Nr.	Startwerte			Optimalwerte			\bar{s} MPa
	a_1 MPa	a_3	b_1 MPa	a_1 MPa	a_3	b_1 MPa	
pko1001	100	0,500	1000	371	0,233	2035	22,882
pko1002	100	0,100	1000	371	0,233	2040	22,851
pko1003	100	0,100	4000	373	0,234	2034	22,870
pko1004	1000	0,100	4000	456	0,274	298	37,909
pko1005	1000	0,100	4000	371	0,233	2043	22,824

Tabelle 5.3: *Optimale Parameter für gekerbte Biegeprobe, alle Lastschritte, Potenzansatz, $a_2 = 10^{-6}$*

Die ersten drei Varianten pko1001 - pko1003 weisen eine gute Übereinstimmung hinsichtlich der optimalen Parameter und der durch die mittlere quadratische Abweichung \bar{s} charakterisierten Approximationsgüte auf. Bei Kenn-Nr. pko1004 hingegen wurde ein lokales Minimum mit wesentlich schlechterer Approximationsgüte ermittelt. Eine Wiederholung mit den gleichen Startwerten, jedoch bei Wahl eines kleineren Radius δ des Vertrauensbereiches im *Levenberg-Marquardt*-Verfahren erzeugte jedoch eine Optimallösung ähnlich den eingangs beschriebenen Varianten, s. Kenn-Nr. pko1005.

Eine ausgeprägte Neigung zu lokalen Minima mit unterschiedlichen Zielfunktionswerten, wie in [36] beobachtet, ist somit nicht festzustellen. Unzureichende Optimierungsergebnisse wie unter pko1004 können durch geeignete Wahl der Prozedurvariablen des Optimierungsverfahrens (z. B. Abbruchkriterium, Radius des Vertrauensbereiches) sowie der Startwerte vermieden werden. Die in den optimalen Parametersätzen sowie in den berechneten Werten der mittleren quadratischen Abweichung der Varianten pko1001 bis pko1003 sowie pko1005 auftretenden relativ kleinen Unterschiede sind dagegen auf die im folgenden beschriebenen systematischen Fehler sowie auf die Diskretisierungsfehler der verwendeten numerischen Verfahren zurückzuführen.

Eine Gegenüberstellung der gemessenen und der mit den optimalen Parametern berechneten Verläufe der Vergleichswerte σ_M und σ_N enthält Bild 5.4. Auffallend ist, daß in den Verläufen des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Längskraft vor allem in den Lastschritten 8 bis 11 relativ große, durch den Optimierungsprozeß nicht beeinflussbare Abweichungen auftreten. So beträgt die bezogene Längskraft σ_N für den achten Lastschritt etwa 70 MPa, welches einen letztlich inakzeptablen Wert darstellt. Da dieser Effekt in allen Optimierungsrechnungen aufgetreten ist, lag der Verdacht nahe, daß es sich dabei um Auswirkungen systematischer Meßfehler handeln könnte.

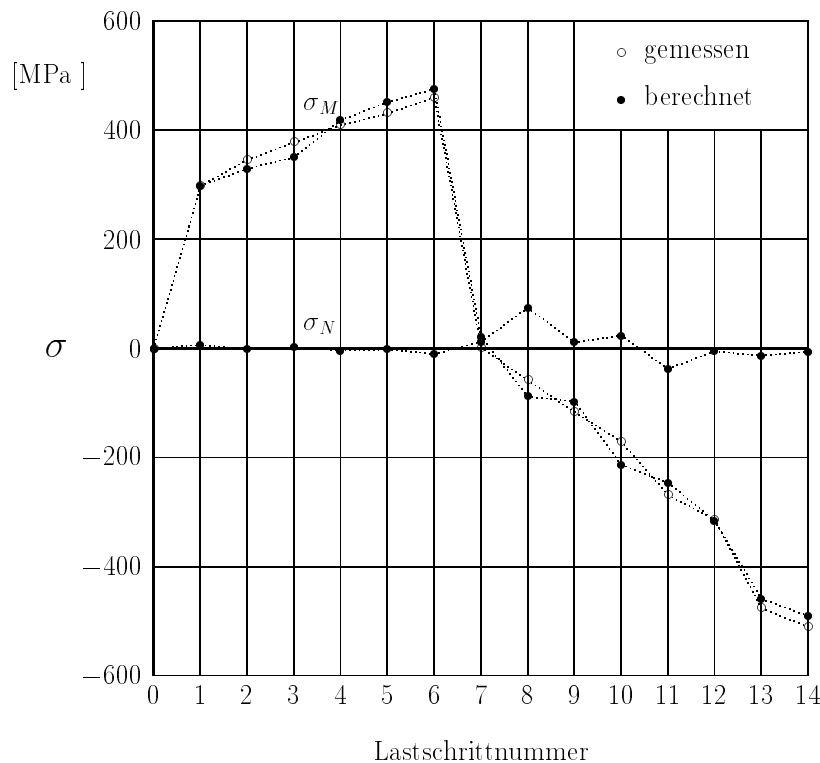


Bild 5.4: *Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, alle Lastschritte, Potenzansatz*

5.3.2 Selektion der Lastschritte mit systematischen Fehlern

Schon die Betrachtung der Moiréaufnahmen zeigte, daß sich diese in den Entlastungs-Lastschritten 8 bis 11 nur recht wenig unterscheiden. Die Ursache ist darin zu sehen, daß bei Entlastung von den Kerben her beginnend die äußeren Meßorte entlastet und damit einer elastischen Formänderung unterworfen werden. Hierbei treten nur kleine Verschiebungs- und Verzerrungsänderungen auf, welche offenbar durch die verwendete Versuchsdurchführung und -auswertung nur ungenügend genau bestimmt werden können.² Somit kommt es

²Aus ähnlichen Gründen wurden auch keine Moiré-Aufnahmen von elastischen Belastungs-Lastschritten angefertigt.

dazu, daß sich die Verzerrungsverläufe ε_{11} und ε_{22} längs des Ligaments mehrfach schneiden, vgl. die Bilder 3.13 und 3.14. Bei der Integration des Deformationsgesetzes werden derartige Vergleichsorte statt einer kontinuierlichen Entlastung einer regellosen Folge von Entlastungs- und Belastungsschritten unterworfen, wodurch die beobachteten, relativ großen systematischen Abweichungen des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Normalkraft entstehen.

Da es wegen der vorliegenden Nichtlinearität des Problems nicht möglich ist, den Konfidenzintervallen eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen (s. Abschnitt 4.5), kann ein Ausreißertest im statistischen Sinne nicht durchgeführt werden. Zur Untersuchung der Frage, welche Lastschritte als mit systematischen Meßfehlern behaftet anzusehen sind, wurde deshalb jeweils der Lastschritt mit der größten Abweichung des bezogenen Biegemomentes bzw. der bezogenen Längskraft gestrichen und eine Optimierungsrechnung mit den verbliebenen Lastschritten durchgeführt, und zwar solange, bis das atypische Verhalten in den berechneten σ_M - und σ_N -Verläufen verschwand.

Die optimalen Parameter einschließlich der Konfidenzintervalle sind in Tabelle 5.4 aufgeführt. Bei Streichung der Lastschritte 8, 9, 10 und 11 in der angegebenen Reihenfolge reduzierten sich die Konfidenzintervalle der Parameter. Bei Streichung weiterer Lastschritte wurde dagegen eine Vergrößerung der Konfidenzintervalle von a_1 und a_3 verzeichnet. Die Betrachtung der zugehörigen Verläufe von σ_M und σ_N ergab ebenfalls, daß die Lastschritte 8 bis 11 als mit systematischen Fehlern behaftet anzusehen sind.³

Lastschritte	a_1 MPa	a_3	b_1 MPa
alle 14 Lastschritte	371 ± 88	$0,233 \pm 0,097$	2040 ± 314
ohne LS 8	361 ± 73	$0,228 \pm 0,084$	2218 ± 280
ohne LSe 8 und 9	369 ± 72	$0,228 \pm 0,081$	2029 ± 296
ohne LSe 8 bis 10	378 ± 63	$0,233 \pm 0,067$	1931 ± 273
ohne LSe 8 bis 11	396 ± 50	$0,233 \pm 0,050$	1643 ± 253
ohne LSe 8 bis 11 und 3	455 ± 66	$0,293 \pm 0,051$	1772 ± 228

Tabelle 5.4: *Optimale Parameter für gekerbte Biegeprobe, Potenzansatz, Selektion der Lastschritte mit systematischen Fehlern*

Alle späteren Berechnungen, soweit sie den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe enthalten, wurden daher unter Berücksichtigung der Lastschritte 1 bis 7 und 12 bis 14 durchgeführt.

³Wie Vergleichsrechnungen mit dem FEM-Programm PMEP gezeigt haben [35], treten auch in den Verschiebungsfeldern größere Abweichungen in den Lastschritten 8 - 11 auf.

5.3.3 Vergleich der Ansätze für die isotrope Verfestigung

Im folgenden sollen die Ergebnisse der Parameteridentifikation für den Biegeversuch an der gekerbten Probe unter Verwendung des Potenzansatzes (2.36), des *arctan*-Ansatzes (2.37) und des Exponentialansatzes (2.38) für die Beschreibung der isotropen Verfestigung bei gleichzeitiger kinematischer Verfestigung nach *Prager* verglichen werden.

Für den Potenzansatz (2.36) wurde zunächst untersucht, wie die der Vermeidung numerischer Instabilität dienende Hilfsgröße a_2 gewählt werden muß, damit sich die zu identifizierenden Parameter a_1 , a_3 und b_1 unabhängig von der Größe von a_2 einstellen. Bei Werten $a_2 \leq 10^{-8}$ stimmten die identifizierten Parameter in mindestens zwei, bei Werten $a_2 \leq 10^{-11}$ sogar in mindestens drei führenden Ziffernstellen überein. Daher wurden alle folgenden Berechnungen für den Potenzansatz mit $a_2 = 10^{-12}$ ausgeführt. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, daß die geeignete Wahl von a_2 von der Maschinengenauigkeit des verwendeten Rechners abhängig ist.

Tabelle 5.5 enthält die optimalen Parameter für den Potenzansatz einschließlich der Konfidenzintervalle und der Korrelationsmatrix.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.		
		a_1	a_3	b_1
a_1 [MPa]	394 ± 56	1,000	0,954	0,166
a_3	0,259 ± 0,040	0,954	1,000	0,372
b_1 [MPa]	1645 ± 248	0,166	0,372	1,000
mittl. quadr. Abweichung		$\bar{s} = 12,045$ MPa		

Tabelle 5.5: *Optimale Parameter für gekerbte Biegeprobe, Potenzansatz ($a_2 = 10^{-12}$)*

Die halbe Breite der Konfidenzintervalle beträgt immerhin rund ein Sechstel des jeweiligen optimalen Parameterwertes. Die beiden Parameter a_1 und a_3 der isotropen Verfestigung sind stark korreliert, die Form der zugehörigen Konfidenzellipse ist näherungsweise aus Bild 4.4 ersichtlich. Dagegen sind die Korrelationskoeffizienten zu b_1 recht gering, so daß von einer ausreichenden Trennung zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung ausgegangen werden kann.

Die Verläufe des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Normalkraft (siehe Bild 5.5) weisen nach Streichung der mit systematischen Fehlern behafteten Lastschritte eine deutlich bessere Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Vergleichswerten auf, was sich auch in der Verringerung der mittleren quadratischen Abweichung auf etwa die Hälfte ausdrückt. Gleichzeitig war zu beobachten, daß die zu verschiedenen Startwerten gehörenden Optimallösungen nunmehr sehr geringe Unterschiede in den ermittelten Parametern und in der Approximationsgüte aufweisen, so daß auf die Darstellung der Abhängigkeit von den Startwerten im folgenden verzichtet werden kann.

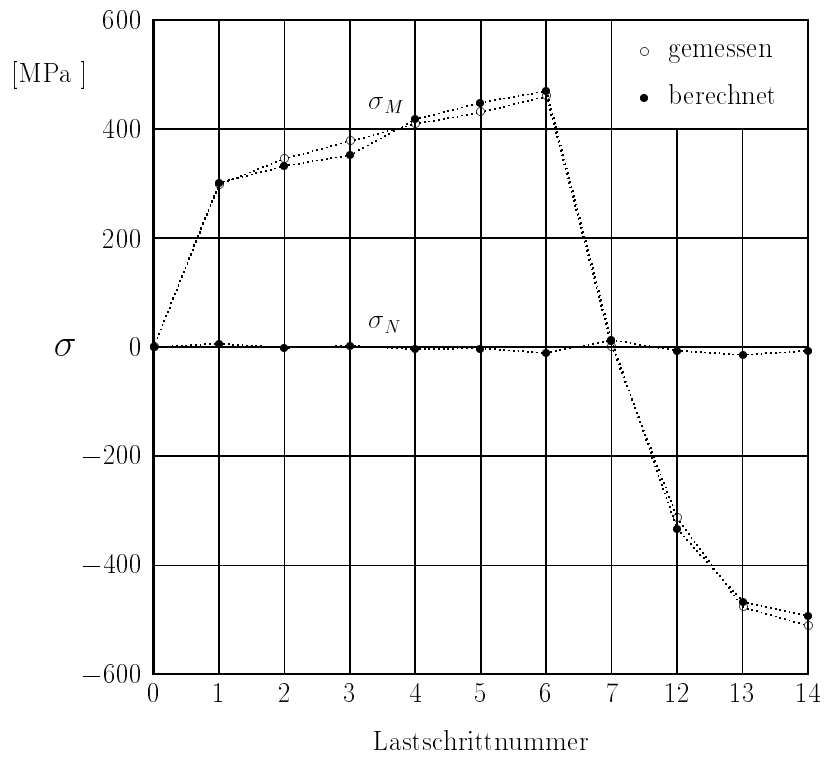


Bild 5.5: Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, Potenzansatz ($a_2 = 10^{-12}$)

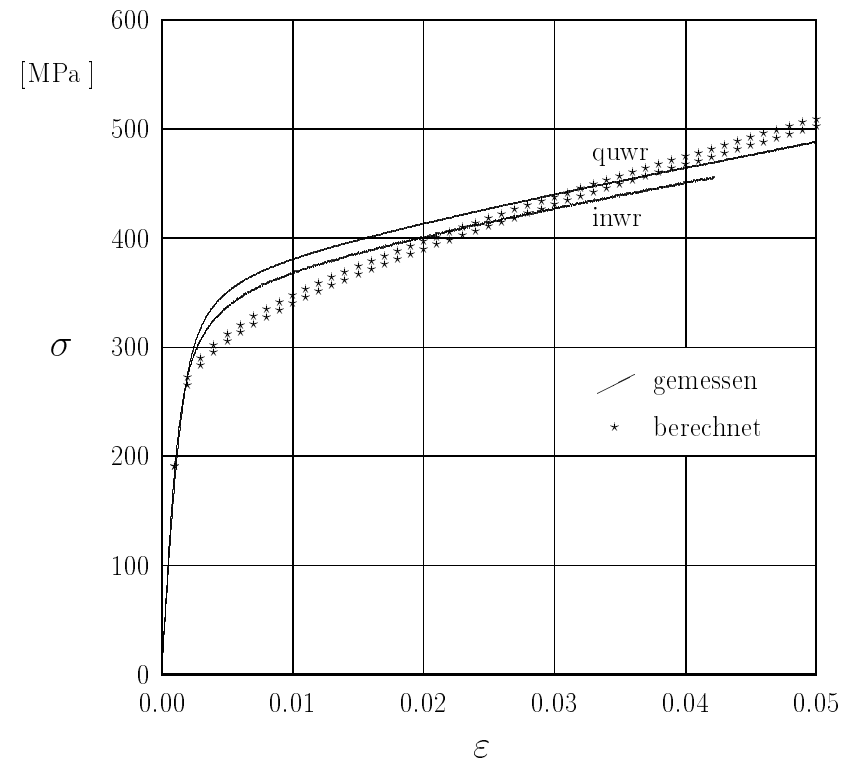


Bild 5.6: Zugspannungskurven in und quer zur Walzrichtung, Potenzansatz ($a_2 = 10^{-12}$)

Dagegen wird der Verlauf der Zugspannungen (siehe Bild 5.6) nur unbefriedigend wiedergegeben. Eine Verbesserung ist nur durch die gleichzeitige Approximation des Biegeversuchs an der gekerbten Biegeprobe und des Zugversuchs im Rahmen einer multikriteriellen Optimierung möglich, s. Abschnitt 5.5.

Zur Verdeutlichung der im Abschnitt 4.5 angegebenen Interpretation des Konfidenzellipsoids wurden die Funktionswerte der Vergleichsgrößen für einige Parametersätze berechnet, die den Eckpunkten des das Konfidenzellipsoid einhüllenden Quaders entsprechen, s. Tabelle 5.6.

Kenn-Nr.	a_1 MPa	a_3	b_1 MPa	\bar{s} MPa
pko1111	394	0,259	1645	12,045
pko1301	450	0,300	1893	12,618
pko1302	339	0,219	1396	13,024
pko1303	450	0,219	1396	30,365

Tabelle 5.6: *Parameter und mittl. quadr. Abweichung für ausgewählte Punkte des Konfidenzbereiches, Potenzansatz ($a_2 = 10^{-12}$)*

Kenn-Nr. pko1111 stellt hierin die optimale Lösung nach Tabelle 5.5 und damit den Mittelpunkt des Konfidenzellipsoids bzw. des Konfidenzquaders dar. Mit den Kenn-Nummern pko1301 und pko1302 wurden die Lösungen für die Ecken des Konfidenzquaders in Richtung der größten Hauptachse des Konfidenzellipsoids ermittelt. Die entsprechenden Werte der mittleren quadratischen Abweichung \bar{s} sind etwas größer als der Optimalwert. Die unterschiedliche Größe der mittleren quadratischen Abweichung bei pko1301 und pko1302 ist auf die Nichtlinearität des Modells zurückzuführen. Mit Kenn.-Nr. pko1303 wurde die Berechnung des Zielfunktionswertes für eine weiter von der Konfidenzellipse entfernt liegende Ecke des Konfidenzquaders durchgeführt. Es ergibt sich ein wesentlich größerer Zielfunktionswert als bei der Optimallösung.

Für den *arctan*-Ansatz wurden die in Tabelle 5.7, für den Exponentialansatz die in Tabelle 5.8 aufgeführten Optimalwerte erhalten.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.			
		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1 [MPa]	62 ± 10	1,000	-0,850	-0,881	-0,597
a_2	6669 ± 17910	-0,850	1,000	0,745	0,347
a_3 [MPa]	1456 ± 326	-0,881	0,745	1,000	0,346
b_1 [MPa]	1706 ± 212	-0,597	0,347	0,346	1,000
mittl. quadr. Abweichung		$\bar{s} = 9,304$ MPa			

Tabelle 5.7: *Optimale Parameter für gekerbte Biegeprobe, arctan-Ansatz*

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.			
		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1 [MPa]	94 \pm 11	1,000	-0,730	-0,849	-0,653
a_2	4858 \pm 14579	-0,730	1,000	0,641	0,337
a_3 [MPa]	1521 \pm 212	-0,849	0,641	1,000	0,362
b_1 [MPa]	1723 \pm 208	-0,653	0,337	0,362	1,000
mittl. quadr. Abweichung $\bar{s} = 9,200$ MPa					

Tabelle 5.8: *Optimale Parameter für gekerbte Biegeprobe, Exponentialansatz*

Die zugehörigen Verläufe der Vergleichsgrößen σ_M und σ_N und der Zugspannungskurven haben für beide Ansätze ein ähnliches Aussehen. Daher erschien es ausreichend, diese Verläufe nur für den *arctan*-Ansatz darzustellen, siehe die Bilder 5.7 bzw. 5.8.

Sowohl der *arctan*-Ansatz wie auch der Exponentialansatz erlauben eine bessere Approximation der Ergebnisse des Biegeversuchs an der gekerbten Probe als der Potenzansatz. Die mittlere quadratische Abweichung beträgt in beiden Fällen nur noch etwa 9 MPa und damit etwa 77% des bei Verwendung des Potenzansatzes erhaltenen Wertes.

Nachteilig ist, daß die Standardabweichung des Parameters a_2 , welcher die Krümmung der Fließkurve beschreibt, ein Mehrfaches des entsprechenden Optimalwertes beträgt, so daß der Konfidenzbereich sehr weit ausgedehnt ist und sogar (physikalisch nicht sinnvolle) negative Werte umfaßt. Aus Bild 5.8 ist zu entnehmen, daß die zugehörigen Zugspannungen nach Überschreiten der Anfangsfließspannung zunächst sehr steil ansteigen, um anschließend in einem kurzen Übergangsbereich in den asymptotischen linearen Verlauf überzugehen. Der Krümmungsparameter a_2 wird also im Ergebnis der Parameteridentifikation für den Biegeversuch an der gekerbten Probe einerseits zu groß bestimmt, andererseits enthält der weite Konfidenzbereich alle kleineren positiven Werte und damit auch den zur Beschreibung der Krümmung der Zugspannungskurven geeigneten Wert. Daraus ist zu schlußfolgern, daß bei der alleinigen Auswertung des Biegeversuchs an der gekerbten Biegeprobe dieser Parameter nicht angesprochen wird und daher zu seiner Bestimmung die Auswertung der Spannungs-Dehnungs-Kurven mit herangezogen werden muß.

Die Korrelationskoeffizienten zwischen den die isotrope Verfestigung beschreibenden Parametern a_1 , a_2 und a_3 sind deutlich kleiner als beim Potenzansatz. Dagegen sind die Korrelationskoeffizienten zwischen den a_i und dem Parameter der kinematischen Verfestigung b_1 etwas größer.

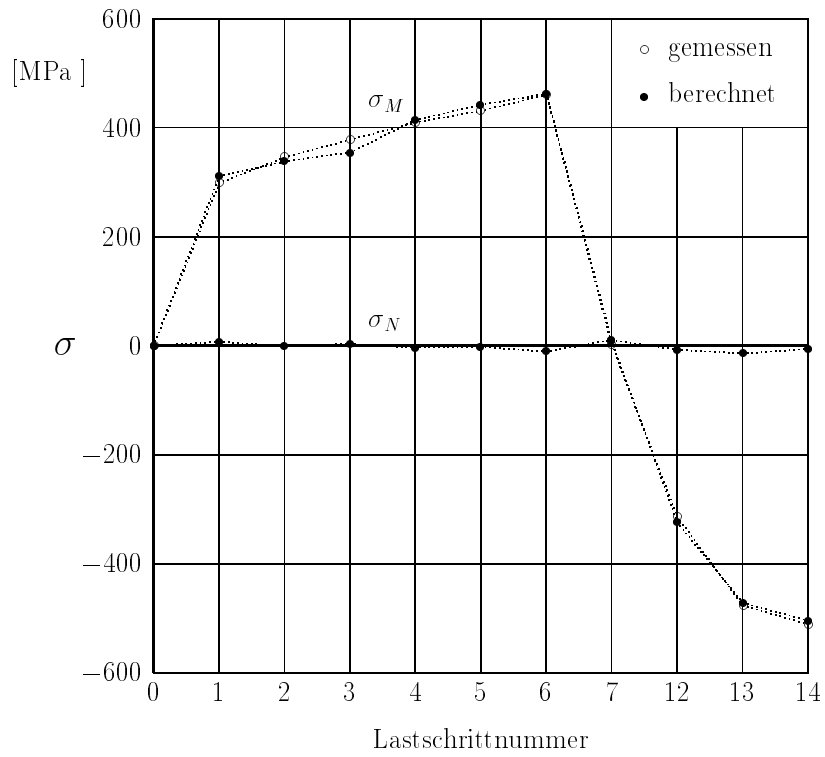


Bild 5.7: *Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, arctan-Ansatz*

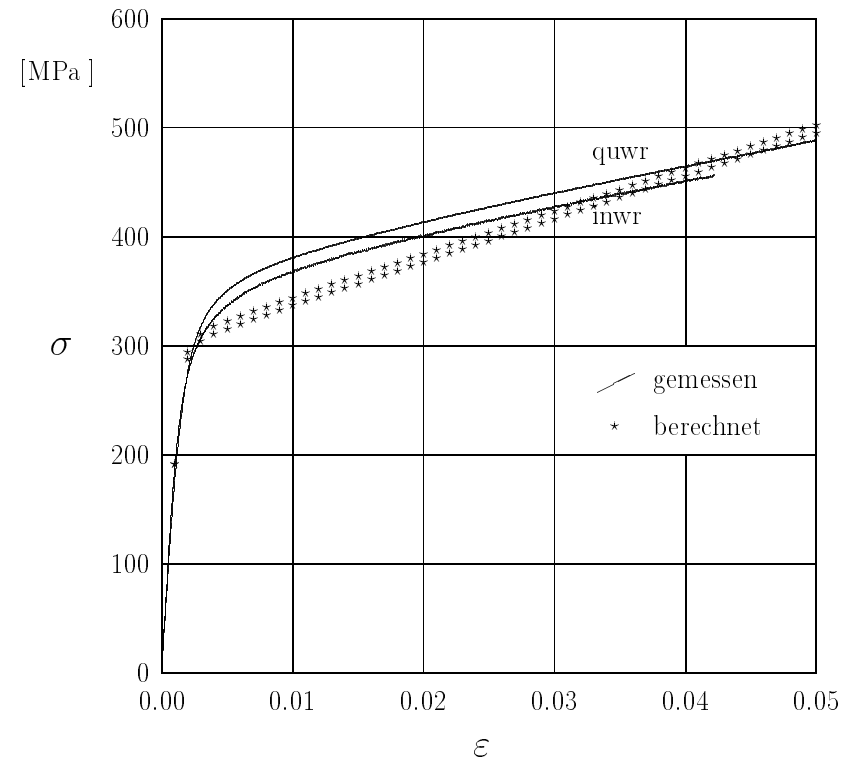


Bild 5.8: *Zugspannungskurven in und quer zur Walzrichtung, arctan-Ansatz*

5.4 Ergebnisse für den Zugversuch

Da der Zugversuch nur eine einsinnige Belastung enthält, ist die Approximation der einachsigen Zugspannungskurven allein mit Hilfe der isotropen Verfestigungsfunktion möglich. Bei Hinzunahme der kinematischen Verfestigung hingegen sind starke Korrelationen zwischen den Verfestigungsparametern der isotropen und der kinematischen Verfestigung zu erwarten.

Weil die Verzerrungen aus dem Biegeversuch an der gekerbten Probe in Form von technischen Dehnungen vorliegen, wurden auch die Zugspannungskurven in Abhängigkeit von den technischen Dehnungen verwendet. In die Zielfunktion wurden die Zugspannungen für Proben in und quer zur Walzrichtung für alle verfügbaren Meßwerte in $\Delta\varepsilon$ -Schritten von 0,001 mit gleichem Gewicht aufgenommen.

Die optimalen Parameter und die Konfidenzintervalle für den Zugversuch bei Verwendung des Potenzansatzes werden in Tabelle 5.9 aufgeführt.

Kenn-Nr.	a_1 MPa	a_3 MPa	b_1 MPa	\bar{s} MPa
piz1401	609 \pm 11	0,277 \pm 0,005	0 (fest)	5,692
pkz1402	235 \pm 2	0,083 \pm 0,010	1723 (fest)	8,570
pkz1403	455 \pm 33	0,225 \pm 0,014	536 \pm 124	5,209

Tabelle 5.9: Optimale Parameter für den Zugversuch, Potenzansatz, $a_2 = 10^{-12}$

Die Berechnung piz1401 wurde mit rein isotroper Verfestigung, die Variante pkz1402 mit isotroper und kinematischer Verfestigung, wobei der Parameter b_1 aus dem Ergebnis der Identifikation für den Biegeversuch an der gekerbten Probe entnommen und festgehalten wurde, und die Variante pkz1403 ebenfalls mit isotroper und kinematischer Verfestigung bei freigegebenem b_1 ausgeführt. Obwohl in den entsprechenden grafischen Darstellungen der gemessenen und berechneten Zugspannungen nur sehr geringe Unterschiede zwischen den einzelnen Varianten festzustellen sind, unterscheiden sich die berechneten optimalen Parameter erheblich. Dieses Verhalten ist auf die starke Korrelation der freien Parameter zurückzuführen, siehe Tabelle 5.10.

Kenn-Nr. Parameter	piz1401			pkz1403		
	a_1	a_3		a_1	a_3	b_1
a_1	1,000	0,986		1,000	0,993	-0,972
a_3	0,986	1,000		0,993	1,000	-0,941
b_1				-0,972	-0,941	1,000

Tabelle 5.10: Zugehörige Korrelationskoeffizienten, Potenzansatz

Die Verläufe der gemessenen und der approximierten Zugspannungen sind im Bild 5.9 enthalten. Der Potenzansatz beschreibt das im oberen Meßbereich beobachtete annähernd

lineare Verhalten der Zugspannungskurven nur in der Weise, daß in der Mitte des Approximationsbereiches größere als die gemessenen, oberhalb und unterhalb davon jedoch kleinere Spannungen erhalten werden. Es kann weiterhin nachgewiesen werden, daß bei Verwendung des Potenzansatzes zur Approximation der Zugspannungskurven das Identifikationsergebnis auch von der Länge des Approximationsbereiches beeinflußt wird.

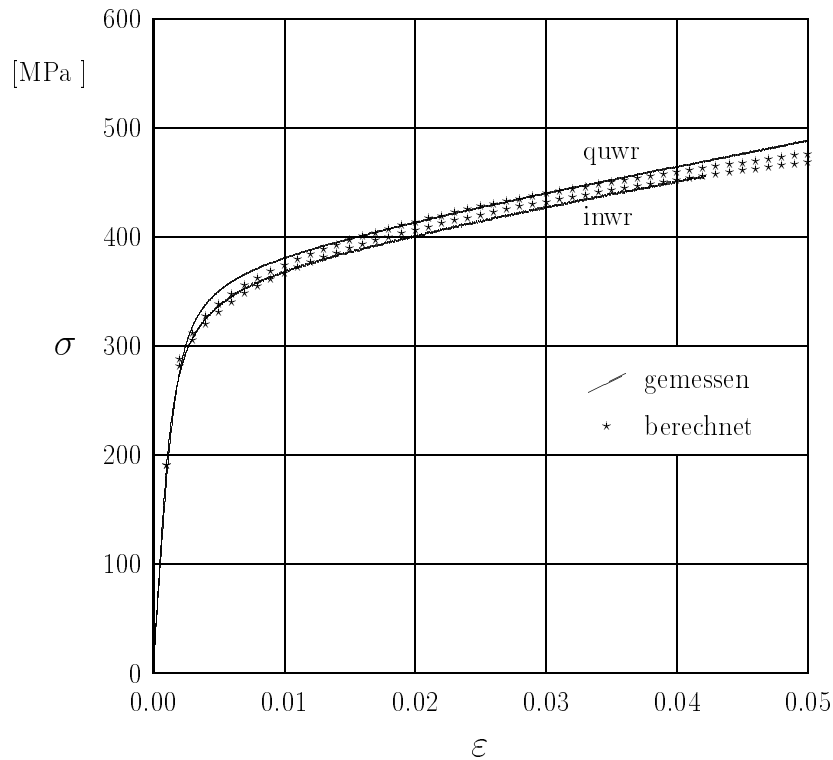


Bild 5.9: Zugspannungskurven in und quer zur Walzrichtung, Potenzansatz, Kenn-Nr. piz1401

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation für den Zugversuch bei Verwendung des *arctan*-Ansatzes sind in Tabelle 5.11 und für den Exponentialansatz in Tabelle 5.12 enthalten.

Kenn-Nr.	a_1 MPa	a_2	a_3 MPa	b_1 MPa	\bar{s} MPa
aiz1401	98 ± 1	1080 ± 58	2549 ± 50	0 (fest)	3,679
akz1402	98 ± 1	1078 ± 56	-13 ± 43	1706 (fest)	3,679
akz1403	98 ± 2	1079 ± 73	2278 ± 914	181 ± 460	3,679

Tabelle 5.11: Optimale Parameter für den Zugversuch, *arctan*-Ansatz

Dabei stellen wiederum Kenn-Nr. aiz1401 bzw. eiz1401 Berechnungen mit rein isotroper Verfestigung, akz1402 bzw. ekz1402 solche mit isotroper und kinematischer Verfestigung, wobei der Wert der *Prager*-Konstanten b_1 aus der Auswertung des Experiments an der gekerbten Biegeprobe entnommen wurde, und akz1403 bzw. ekz1403 Optimierungsrechnungen mit isotroper und kinematischer Verfestigung dar.

Kenn-Nr.	a_1 MPa	a_2	a_3 MPa	b_1 MPa	\bar{s} MPa
eiz1401	143 ± 1	722 ± 35	2795 ± 46	0 (fest)	4,526
ekz1402	143 ± 1	724 ± 35	330 ± 46	1645 (fest)	4,526
ekz1403	143 ± 1	721 ± 36	883 ± 1300000	1274 ± 870000	4,526

Tabelle 5.12: Optimale Parameter für den Zugversuch, Exponentialansatz

Für den jeweils gewählten Ansatz stimmen alle drei Berechnungen hinsichtlich der mittleren quadratischen Abweichung und der Verläufe der berechneten Zugspannungen überein. Nahezu übereinstimmend sind auch die jeweiligen Optimalwerte der Parameter a_1 und a_2 . Dagegen liegt für die Parameter a_3 und b_1 die erwartete starke Korrelation vor, s. Tabelle 5.13 für den *arctan*-Ansatz.

Kenn-Nr. Parameter	aiz1401				akz1403			
	a_1	a_2	a_3		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1	1,000	-0,738	-0,919		1,000	-0,818	-0,887	0,863
a_2	-0,738	1,000	0,605		-0,818	1,000	0,629	-0,603
a_3	-0,919	0,605	1,000		-0,887	0,629	1,000	-0,999
b_1					0,863	-0,603	-0,999	1,000

Tabelle 5.13: Zugehörige Korrelationskoeffizienten, *arctan*-Ansatz

Sowohl bei Verwendung des *arctan*-Ansatzes als auch des Exponentialansatzes für die isotrope Verfestigung wird wegen ihres asymptotischen Verhaltens der experimentell beobachtete nahezu lineare Verlauf der Zugspannungskurven im oberen Meßbereich ausgezeichnet wiedergegeben, s. Bild 5.10. Aussagen über den Parameter b_1 der kinematischen Verfestigung sind dagegen nur dann möglich, wenn experimentelle Ergebnisse für Entlastung und Gegenbelastung in die Berechnung einbezogen werden.

Bild 5.11 enthält für die optimalen Parameter aus Variante aiz1401 die zugehörigen Verläufe der Vergleichswerte σ_M und σ_N des Biegeversuchs an der gekerbten Probe. Da die kinematische Verfestigung nicht berücksichtigt wurde, ergeben sich deutliche Abweichungen in den Lastschritten 12 bis 14 der Gegenbelastung.

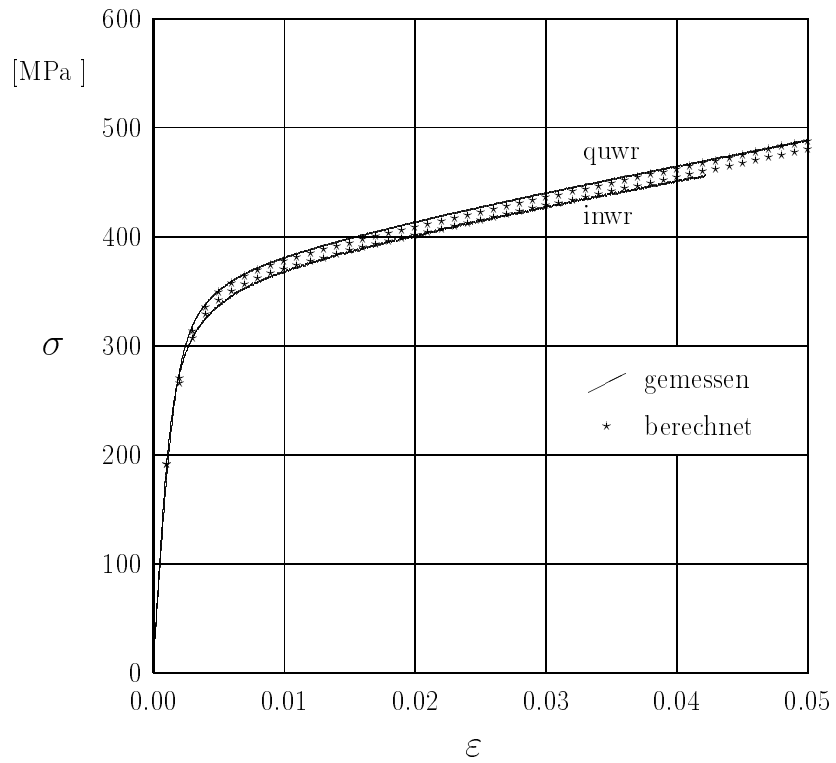


Bild 5.10: Zugspannungskurven in und quer zur Walzrichtung, *arctan*-Ansatz, Kenn.-Nr. aiz1401

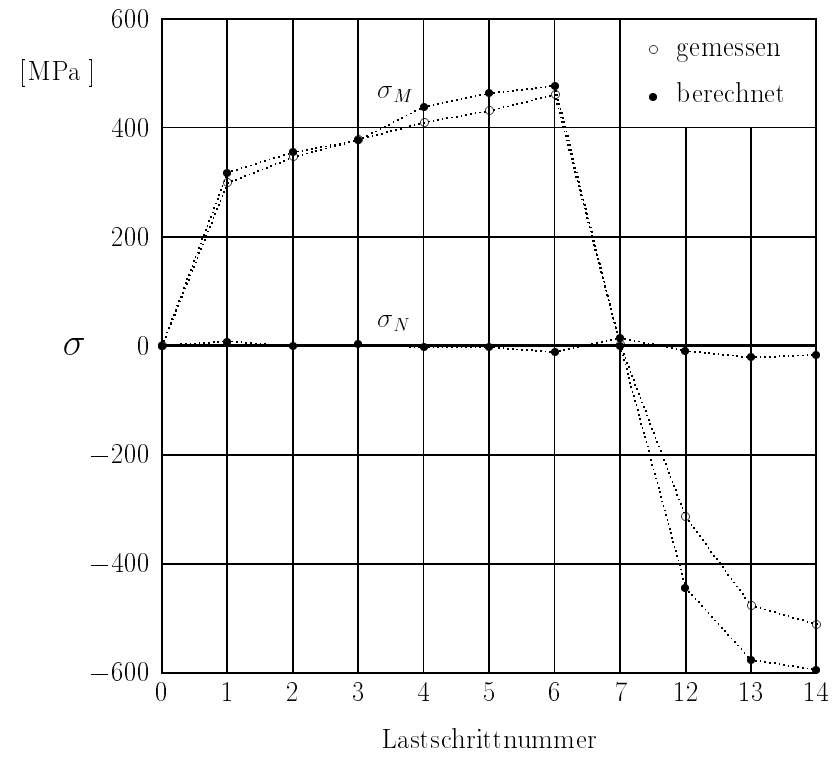


Bild 5.11: Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, *arctan*-Ansatz, Kenn.-Nr. aiz1401

5.5 Kombination gekerbte Biegeprobe und Zugversuch

Die im Abschnitt 5.3 vorgenommene Parameterschätzung unter Zugrundelegung der Meßergebnisse für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe ergibt eine näherungsweise Approximation des lastschrittweise gemessenen Biegemomentes und der Längskraft, siehe z. B. Bild 5.7, nicht jedoch der Zugspannungsverläufe, vgl. Bild 5.8. Wegen der vorhandenen Belastungsumkehr können isotrope und kinematische Verfestigung separiert werden, jedoch sind die Aussagen über das Verfestigungsverhalten im Übergangsbereich zwischen elastischen und plastischen Deformationen nur unzureichend.

Im Abschnitt 5.4 erfolgte die Parameterbestimmung mit Hilfe der Auswertung der einachsigen Zugspannungskurven aus dem Zugversuch. Hierdurch kann das Verhalten im Übergangsbereich wiedergegeben werden, s. Bild 5.10. Da es sich um eine reine Belastung handelt, ist jedoch keine Aussage über die kinematische Verfestigung möglich, vgl. Bild 5.11.

Im folgenden wird daher angestrebt, durch kombinierte Auswertung beider Versuche ein Identifikationsergebnis zu erhalten, welches die Meßergebnisse *beider* Versuche approximiert. Zur multikriteriellen Optimierung werden die in den Gleichungen (4.74) - (4.79) definierten Zielfunktionen verwendet.

5.5.1 Multikriterielle Optimierung für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe und den Zugversuch

Die Resultate der multikriteriellen Optimierung für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe und den Zugversuch sind in Tabelle 5.14 zusammengefaßt dargestellt. Wegen der besseren Approximation der Versuchsergebnisse, vgl. Abschnitt 5.5.2, wurde der *arctan*-Ansatz (2.37) für die isotrope Verfestigung gewählt.

In der ersten Zeile sind nochmals die Ergebnisse der Fehlerquadratminimum-Schätzung für den Biegeversuch an der gekerbten Biegeprobe nach Abschnitt 5.3, in der letzten Zeile die für den Zugversuch nach Abschnitt 5.4 aufgeführt. Die hierfür erhaltenen Werte der Standardabweichung werden für die Zielfunktionen nach Gl. (4.76) und (4.77) benötigt. Die weiteren Zeilen der Tabelle enthalten die Optimierungsergebnisse für die multikriteriellen Zielfunktionen (4.74) - (4.79). Die Wichtung mit dem Kehrwert der Varianz der teilloptimalen Lösungen (4.77) entspricht der *Gauß-Markov*-Schätzung.

Um direkt vergleichbare Werte der Standardabweichung zu erhalten, wurde die Bestimmung der Lösung für die *Gauß-Markov*-Schätzung in der Weise vorgenommen, daß die Teilzielfunktion Φ_j mit der kleinsten Varianz $\sigma_j^2 = \sigma_{min}^2$ den Wichtungsfaktor $w_j = 1$ erhält und allen anderen Teilzielfunktionen Φ_i Wichtungsfaktoren

$$w_i = \frac{\sigma_{min}^2}{\sigma_i^2} \leq 1 \quad (5.16)$$

zugeordnet werden. Dieses Vorgehen entspricht der Multiplikation der Zielfunktion (4.77) mit σ_{min}^2 und bewirkt, daß die zugehörige Varianz einerseits die gleiche physikalische Dimension wie σ_{min}^2 besitzt und sich andererseits immer größer als σ_{min}^2 einstellt.

Die Wahl der Wichtungsfaktoren sowie die Berechnung der Konfidenzintervalle und der Korrelationskoeffizienten bei den anderen multikriteriellen Zielfunktionen wurde analog

durchgeführt. Bei der Bewertung der Ergebnisse ist zu beachten, daß nur für die *Gauß-Markov*-Schätzung eine theoretische Begründung der Konfidenz- und Korrelationsaussagen vorliegt, für die anderen multikriteriellen Zielfunktionen jedoch nicht.

Die in Tabelle 5.14 enthaltenen Ergebnisse der multikriteriellen Optimierung wurden entsprechend der Größe der mittleren quadratischen Abweichung \bar{s} geordnet. Neben den Konfidenzbereichen der Parameter und der mittleren quadratischen Abweichung wurde der bzgl. der Approximation der Zugspannungskurven kritische Korrelationskoeffizient $R(a_3, b_1)$ zwischen den Parametern a_3 und b_1 in die Tabelle aufgenommen.

Von oben nach unten gelesen, nimmt in Tabelle 5.14 der Einfluß der Vergleichsgrößen des Biegeversuchs an der gekerbten Probe auf das Gesamtergebnis ab, während der Einfluß der Vergleichsgrößen des Zugversuchs ansteigt. Entsprechend sinkt die mittlere quadratische Abweichung vom Wert des Biegeversuchs auf den des Zugversuchs und auch der Korrelationskoeffizient nähert sich dem Wert des für den Zugversuch berechneten Korrelationskoeffizienten der Parameter a_3 und b_1 .

Die Parameter a_1 und a_2 weisen die kleinsten Konfidenzbereiche bei Anwendung der *Gauß-Markov*-Schätzung auf. Dagegen sind die zugehörigen Konfidenzbereiche für a_3 und b_1 etwas größer als für die Zielfunktionen nach Gl. (4.75), (4.76) und (4.78), was auf die zunehmende Korrelation zwischen beiden Parametern zurückzuführen ist.

Die Bilder 5.12 und 5.13 enthalten die Verläufe der in den beiden Versuchen auftretenden Vergleichsgrößen für die Parameter aus der *Gauß-Markov*-Schätzung. Die zu den optimalen Parametern der Zielfunktionen nach Gl. (4.75) - (4.79) gehörenden Verläufe des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Längskraft sowie der Zugspannungen weisen vergleichsweise geringe Unterschiede auf.

Wegen des wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrundes ist die *Gauß-Markov*-Schätzung für die Parameterbestimmung aus Versuchen bzw. Merkmalen mit unterschiedlichen Varianzen zu bevorzugen. Es ist jedoch denkbar, bei sehr starken Korrelationen der Parameter untereinander ersatzweise eine der Zielfunktionen nach Gl. (4.75), (4.76) oder (4.78) zu verwenden.

Überraschend ist das Ergebnis für die multikriterielle Zielfunktion nach Gl. (4.79). Das Iterationsverhalten der Optimierungsrechnung war in diesem Falle durch eine langsame Konvergenz gegen verschiedene, von der Wahl der Startwerte abhängige lokale Minima gekennzeichnet. Die Korrelationskoeffizienten für die angegebene Lösung sind sämtlich nahezu +1 oder -1, was sich auch in den sehr großen, die Parameterwerte um ein Mehrfaches überschreitenden Konfidenzbereichen widerspiegelt.⁴ Die Zielfunktion (4.79) hat sich daher als ungeeignet für die Parameteridentifikation herausgestellt.

⁴Die Ursache für das beobachtete Lösungsverhalten ist wahrscheinlich darin zu suchen, daß das Fehlerquadratminimum-Funktional Φ in (4.79) nochmals quadriert wird und somit die Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Vergleichswerten mit der vierten Potenz in die Zielfunktion eingehen.

Zielfunktion nach Gl.	Wichtung	a_1 MPa	a_2	a_3 MPa	b_1 MPa	$R(a_3, b_1)$	\bar{s} MPa
(4.62)	gek. Biegepr.	62 ± 10	6669 ± 17910	1456 ± 326	1706 ± 212	+0,346	9,304
(4.74)	$1/n_i$	89 ± 5	1140 ± 367	776 ± 194	1440 ± 120	−0,147	10,513
(4.75)	1	96 ± 2	1070 ± 109	606 ± 103	1355 ± 64	−0,648	7,253
(4.78)	$\Delta_{rel}\Phi_i$	97 ± 2	1071 ± 108	592 ± 108	1347 ± 68	−0,730	6,631
(4.76)	$1/s_i$	98 ± 1	1073 ± 83	575 ± 121	1337 ± 75	−0,850	5,477
(4.79)	$(\Delta_{rel}\Phi_i)^2$	95 ± 2924	1046 ± 228646	623 ± 161428	1400 ± 16204	−0,973	4,980
(4.77)	$1/s_i^2$	98 ± 1	1076 ± 68	569 ± 159	1327 ± 99	−0,942	4,457
(4.62)	Zugversuch	98 ± 2	1079 ± 73	2278 ± 915	181 ± 461	−0,999	3,679

Tabelle 5.14: Optimale Parameter aus multikriterieller Optimierung, *arctan*-Ansatz

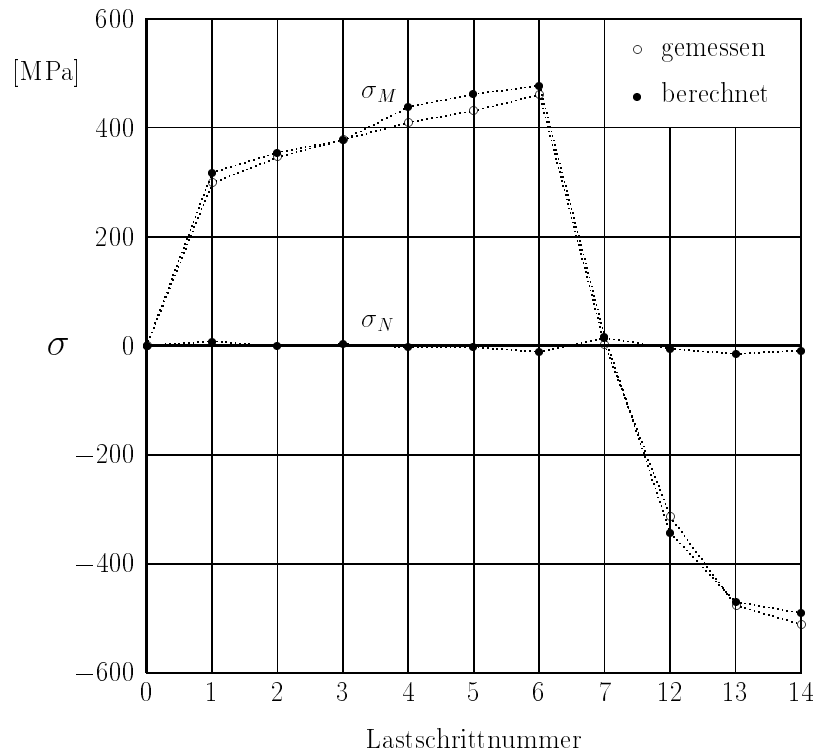


Bild 5.12: *Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, arctan-Ansatz*

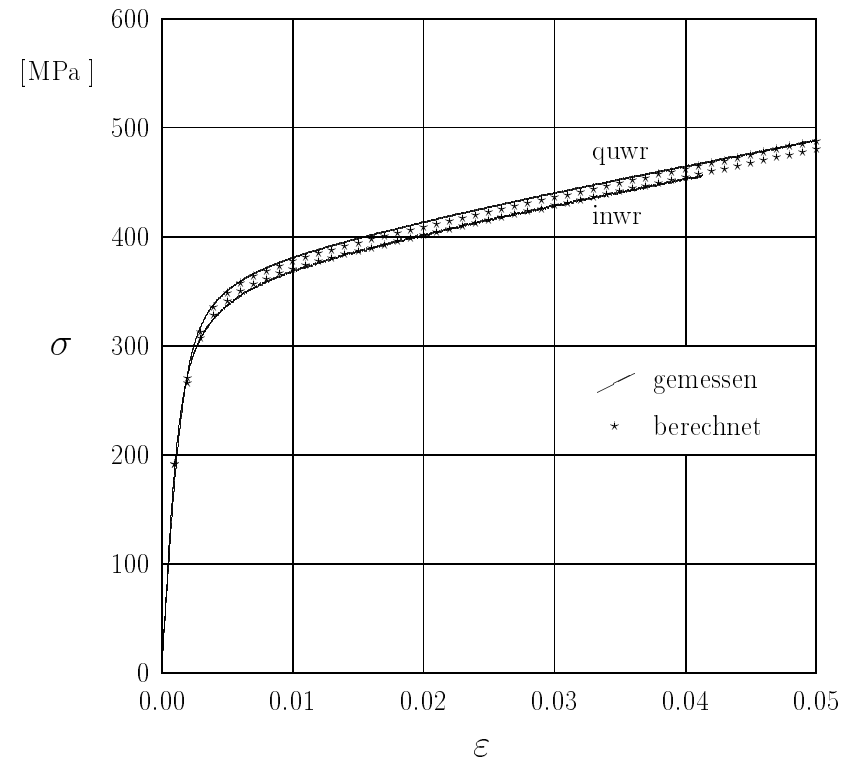


Bild 5.13: *Zugspannungskurven in und quer zur Walzrichtung, Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, arctan-Ansatz*

5.5.2 Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Ansätze

Die optimalen Parameter einschließlich der Konfidenzintervalle und der Korrelationskoeffizienten bei Anwendung der *Gauß-Markov*-Schätzung sind für den Potenzansatz der isotropen Verfestigung in Tabelle 5.15, für den *arctan*-Ansatz in Tabelle 5.16 sowie für den Exponentialansatz in Tabelle 5.17 enthalten.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.		
		a_1	a_3	b_1
a_1 [MPa]	380 ± 25	1,000	0,987	-0,948
a_3	0,193 ± 0,013	0,987	1,000	-0,893
b_1 [MPa]	844 ± 106	-0,948	-0,893	1,000
mittl. quadr. Abweichung $\bar{s} = 6,430$ MPa				

Tabelle 5.15: *Optimale Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, Potenzansatz ($a_2 = 10^{-12}$)*

Für den Potenzansatz ergibt sich der größte Wert der mittleren quadratischen Abweichung aller drei untersuchten Ansätze. Weiterhin liegt eine starke Korrelation der drei freien Parameter vor.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.			
		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1 [MPa]	98 ± 1	1,000	-0,734	-0,253	-0,061
a_2	1076 ± 68	-0,734	1,000	0,158	0,047
a_3 [MPa]	569 ± 159	-0,253	0,158	1,000	-0,942
b_1 [MPa]	1327 ± 99	-0,061	0,047	-0,942	1,000
mittl. quadr. Abweichung $\bar{s} = 4,457$ MPa					

Tabelle 5.16: *Optimale Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, arctan-Ansatz*

Der *arctan*-Ansatz weist den kleinsten Wert der mittleren quadratischen Abweichung auf. Eine starke Korrelation tritt nur zwischen den Parametern a_3 und b_1 auf.

Für den Exponentialansatz ergibt sich eine größere mittlere quadratische Abweichung der Vergleichswerte als beim *arctan*-Ansatz. Bezüglich der Korrelationskoeffizienten liegt ein ähnliches Verhalten beider Ansätze vor. Die Konfidenzbereiche für die Pragerkonstante b_1 bei Anwendung des *arctan*-Ansatzes bzw. des Exponentialansatzes überlappen einander.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.			
		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1 [MPa]	143 \pm 1	1,000	-0,508	-0,181	-0,181
a_2	718 \pm 41	-0,508	1,000	0,100	0,078
a_3 [MPa]	719 \pm 135	-0,181	0,100	1,000	-0,920
b_1 [MPa]	1395 \pm 92	-0,181	0,078	-0,920	1,000
mittl. quadr. Abweichung $\bar{s} = 5,403$ MPa					

Tabelle 5.17: *Optimale Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, Exponentialansatz*

Die Einbeziehung weiterer Parameter ergibt eine nur unwesentliche Verbesserung der Approximationsgüte, siehe Tabelle 5.18. Die erste Zeile enthält die *Gauß-Markov*-Schätzung aus Tabelle 5.16 für die isotrope Verfestigung nach dem *arctan*-Ansatz und die kinematische Verfestigung nach *Prager*. Die zweite und dritte Zeile enthalten die Resultate bei Zugrundelegung der kinematischen Verfestigung entsprechend (2.40) bzw. nach *Armstrong* und *Frederick* (2.41). In der dritten und vierten Zeile sind die Identifikationsergebnisse bei Berücksichtigung formativer Verfestigung entsprechend (2.42) mit den Parametern c_1 oder c_2 dargestellt.

a_1 MPa	a_2	a_3 MPa	b_1 MPa	zusätzl. Parameter	\bar{s} MPa
98 \pm 1	1076 \pm 68	569 \pm 159	1327 \pm 99	—	4,457
99 \pm 2	1059 \pm 78	492 \pm 263	1331 \pm 101	$b_2 = 1707 \pm 4086$	4,453
98 \pm 2	1063 \pm 75	597 \pm 179	1277 \pm 166	$b_3 = -1 \pm 3$	4,454
98 \pm 2	1070 \pm 85	75 \pm 2301	1349 \pm 196	$c_1 = -2 \pm 12$	4,449
98 \pm 2	1062 \pm 78	453 \pm 146	1365 \pm 146	$c_2 = -11 \pm 36$	4,445

Tabelle 5.18: *Optimale Parameter aus Gauß-Markov-Schätzung, arctan-Ansatz, Berücksichtigung weiterer Parameter*

Da die Standardabweichung der zusätzlich berücksichtigten Parameter deren Schätzwert übersteigt, kann von einer Überparametrisierung der entsprechenden Modelle in Hinsicht auf die zur Verfügung stehenden experimentellen Vergleichswerte ausgegangen werden. Der Parameter b_3 , welcher im Relaxationsterm des Ansatzes für die kinematische Verfestigung nach *Armstrong* und *Frederick* auftritt und entsprechend (2.41) positiv sein muß, weist sogar einen negativen Schätzwert auf.

Aus Tabelle 5.18 ist weiterhin zu ersehen, daß eine Vergrößerung der Anzahl der freien Parameter im allgemeinen auch eine Vergrößerung der Konfidenzbereiche nach sich zieht.

5.6 Gerade Biegeprobe

In den Abschnitten 5.4 und 5.5 wurden die im Zugversuch gemessenen Zugspannungskurven allein bzw. in Kombination mit den Ergebnissen des Biegeversuchs an der gekerbten Probe erfolgreich zur Parameteridentifikation herangezogen. Es ergeben sich keine Widersprüche zwischen den Resultaten der Bestimmung der Anfangs-Fließortkurve, den Ergebnissen des Biegeversuchs an der gekerbten Biegeprobe und denen des Zugversuchs.

Dagegen ist die Beschreibung der aus dem Biegeversuch an der geraden Probe stammenden Druckspannungskurven bei Vorgabe der Anfangsfließortkurve nach Tabelle 5.1 sowohl für die Fließbedingung (2.12) als auch für die Fließbedingung (2.6) nur ungenügend.

Wie im folgenden gezeigt wird, ist bei Annahme einer noch zu bestimmenden anderen Anfangs-Fließortkurve eine bessere Approximation der aus dem Biegeversuch an der geraden Probe ermittelten Zug- und Druckspannungskurven möglich.

Für die Fließbedingung (2.12) kann unter Beachtung von (5.15) hergeleitet werden, daß die Differenzen der Beträge der Zug- und Druckspannungskurven in Walzrichtung dem Dreifachen des Anfangswertes α_{11_o} und quer zur Walzrichtung dem Dreifachen des Anfangswertes α_{22_o} der Rückspannungen entsprechen. Positive Werte von α_{11_o} bzw. α_{22_o} bedeuten, daß die Zugspannungen, negative Werte, daß die Druckspannungen betragsmäßig größer sind.

Die Differenz der Beträge der Zug- und Druckspannungskurven für $\varepsilon \approx 0,01 \dots 0,02$ beträgt in Walzrichtung etwa 42 MPa, quer zur Walzrichtung etwa 36 MPa. Hieraus resultieren Anfangswerte der Rückspannungen von $\alpha_{11_o} = -14$ MPa und $\alpha_{22_o} = -12$ MPa.

Zusätzlich weisen die Spannungs-Dehnungs-Kurven quer zur Walzrichtung sämtlich größere Beträge als die zugehörigen Kurven in Walzrichtung auf. Dieser Effekt kann durch eine zusätzliche Drehung der Anfangs-Fließortkurve beschrieben werden. Eine gute Übereinstimmung der numerisch und experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kurven wurde erhalten, wenn $N_{1111_o} = 1,1$ gesetzt wird. Eine Zusammenstellung der Anfangswerte der inneren Variablen enthält Tabelle 5.19.

Fließbedingung	N_{ijkl_o}	α_{ij_o}	σ_{F_0}
nach Gl. (2.6)	$N_{1111_o} = 1,1$	$\alpha_{11_o} = -14,0$ MPa	$\sigma_{F_0} = 226,4$ MPa
	$N_{1122_o} = -0,5$	$\alpha_{22_o} = -12,0$ MPa	
	$N_{2222_o} = 1,0$		

Tabelle 5.19: *Anfangswerte der Koordinaten des Distorsionstensors, der Rückspannungen und der Fließspannung zur Approximation der Zug- und Druckspannungskurven aus dem Biegeversuch an der geraden Probe*

Mit den Anfangswerten nach Tabelle 5.19 wurde nunmehr wiederum die Parameteridentifikation mit der Fehlerquadratminimum-Schätzung für den Biegeversuch an der gekerbten Probe sowie für alle acht mit Hilfe des Biegeversuchs an den geraden Proben ermittelten

Spannungs-Dehnungs-Kurven und die *Gauß-Markov*-Schätzung für die Vergleichsgrößen beider Biegeversuche durchgeführt.

Die mit Hilfe der *Gauß-Markov*-Schätzung berechneten Parameter sind in Tabelle 5.20, die zugehörigen Verläufe der Zug- und Druckspannungen in und quer zur Walzrichtung in den Bildern 5.14 und 5.15 sowie die Verläufe des bezogenen Biegemomentes und der bezogenen Normalkraft für den Biegeversuch an der gekerbten Probe im Bild 5.16 enthalten.

Parameter	Konfidenzbereich	Korrelationskoeff. bzgl.			
		a_1	a_2	a_3	b_1
a_1 [MPa]	109 ± 1	1,000	-0,702	-0,238	0,017
a_2	1347 ± 100	-0,702	1,000	0,136	0,003
a_3 [MPa]	569 ± 235	-0,238	0,136	1,000	-0,970
b_1 [MPa]	1445 ± 142	0,017	0,003	-0,970	1,000
mittl. quadr. Abweichung $\bar{s} = 10,666$ MPa					

Tabelle 5.20: *Optimale Parameter aus der Gauß-Markov-Schätzung für die Biegeversuche an der gekerbten und den geraden Proben, arctan-Ansatz*

Die Parameter stellen sich ähnlich wie bei der gleichzeitigen Auswertung der Zugversuche und des Biegeversuchs an der gekerbten Probe ein, vergleiche Tabelle 5.16 aus Abschnitt 5.5. Die mittlere quadratische Abweichung zwischen den berechneten und den gemessenen Vergleichswerten beträgt jedoch mehr als das Doppelte.

Die zugehörigen Zug- und Druckspannungsverläufe weisen nur im Anfangsbereich eine gute Übereinstimmung auf. Mit zunehmender Dehnung vergrößern sich die Abweichungen, da die experimentell ermittelten Zug- und Druckspannungskurven auseinander driften. Ein derartiges Verhalten ist jedoch mit isotroper Verfestigung und kinematischer Verfestigung nach *Prager* prinzipiell nicht beschreibbar. Auch die Einbeziehung des Relaxationsterms aus dem Ansatz nach *Armstrong* und *Frederick* erzeugt keine Abhilfe, da für $b_3 > 0$ der Abstand zwischen Zug- und Druckspannungskurven mit wachsender Dehnung verkleinert wird.

Die berechnete bezogene Längskraft steigt in den Belastungsschritten 1 - 6 stetig an und erreicht in den Lastschritten 6, 13 und 14 Werte um 30 MPa. Dieses Verhalten kann als systematischer Fehler, zurückzuführen auf die abweichende Wahl der Anfangswerte der inneren Variablen, gedeutet werden.

Die Ergebnisse des Biegeversuches an geraden Proben sind daher in zweifacher Hinsicht nicht mit den Ergebnissen des Biegeversuches an der gekerbten Probe sowie des Zugversuches vereinbar. Zum ersten ist das Auseinanderdriften der Zug- und der Druckspannungskurven nicht mit den in der Plastomechanik üblichen Ansätzen beschreibbar. Zum zweiten wird eine gute Übereinstimmung nur bei Wahl einer anderen Anfangs-Fließortkurve erreicht.

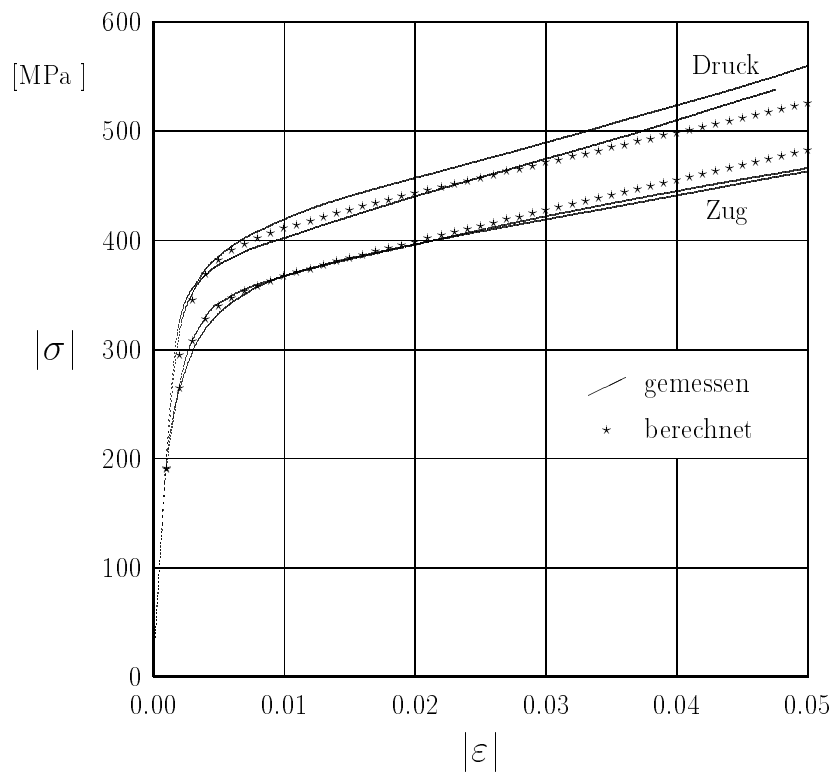


Bild 5.14: Zug- und Druckspannungskurven in Walzrichtung, Parameter aus Tabelle 5.20

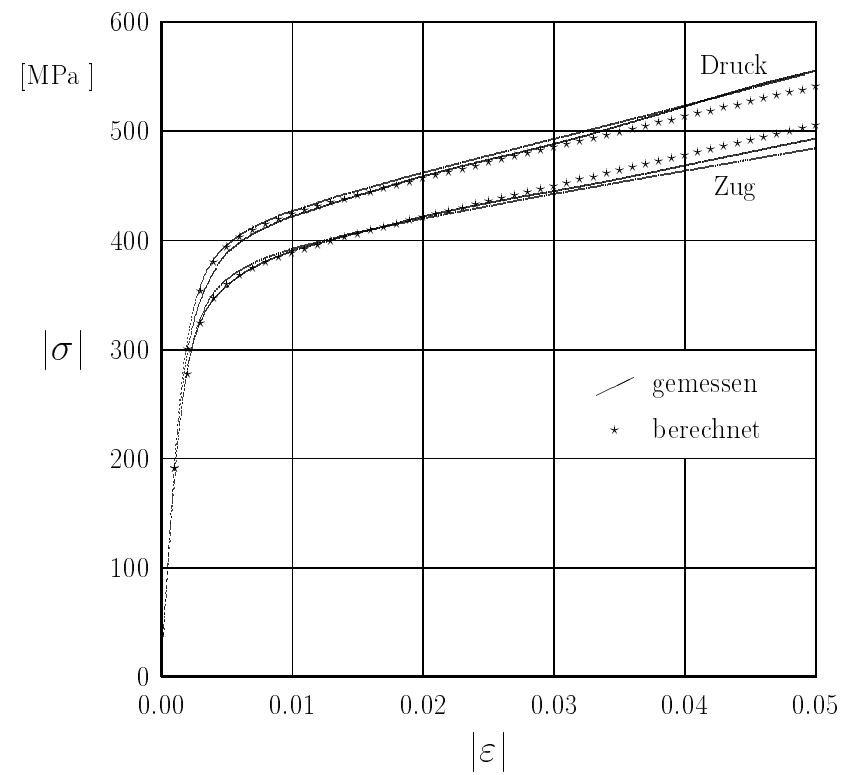


Bild 5.15: Zug- und Druckspannungskurven quer zur Walzrichtung, Parameter aus Tabelle 5.20

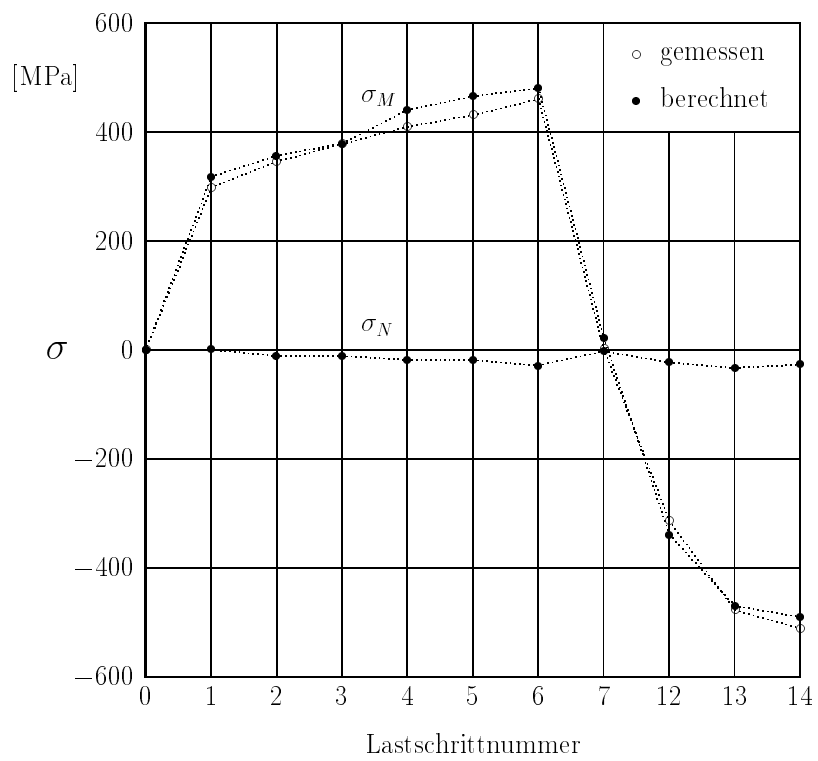


Bild 5.16: *Bezogenes Biegemoment und bezogene Längskraft, Parameter aus Tabelle 5.20*

Kapitel 6

Zusammenfassung

Gegenstand der in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen ist die Identifikation von Materialparametern aus der Minimierung eines Fehlerquadratfunktional, welches die Differenzen zwischen experimentell beobachteten und mit einem vorgegebenen Modell berechneten Werten von geeignet zu wählenden Vergleichsgrößen enthält. Die Parameteridentifikation wird am Beispiel elastisch-plastischer Deformationen von Metallen bei kleinen Verzerrungen durchgeführt, die Herangehensweise kann jedoch auf andere natur- oder technikkwissenschaftliche Probleme übertragen werden.

Das Deformationsgesetz für kleine elastisch-plastische Verzerrungen stellt ein nichtlineares Algebro-Differentialgleichungssystem dar, dessen punktweise Integration hinsichtlich der Zeit mit dem impliziten *Euler*-Verfahren erfolgt. Dabei entstehen nichtlineare Gleichungssysteme, welche mit dem *Newton*-Verfahren gelöst werden. Um ein Integrationsergebnis zu erhalten, welches hinsichtlich der für die anschließende Optimierung benötigten Spannungen weitgehend unabhängig von der Größe der Lastinkremente ist, wurde eine Unterteilung der Lastschritte in beliebig viele Zwischenschritte mit linearem Belastungsweg vorgesehen.

Zur möglichst umfassenden Auswertung der experimentellen Informationen war es erforderlich, in die Zielfunktion sowohl lokale Vergleichsgrößen in Form von Spannungen als auch globale Vergleichsgrößen in Form der Schnittreaktionen Längskraft und Biegemoment aufzunehmen. Letztere wurden mittels Division durch die zugehörigen Flächenkennwerte in entsprechende bezogene Vergleichsgrößen, welche in Dimension und Größe den zu berücksichtigenden Einzelspannungen entsprechen, umgerechnet. Für die Optimierung der Zielfunktion hat sich das Verfahren nach *Levenberg* und *Marquardt*, welches eine Kombination des Gradientenverfahrens und des *Gauß-Newton*-Verfahrens realisiert, bewährt. Die für den Optimierungsprozeß benötigten Ableitungen wurden mit einer semianalytischen Methode berechnet. Diese, in den Integrationsalgorithmus des Deformationsgesetzes eingebettete Sensitivitätsanalyse ist wesentlich effektiver und genauer als eine numerische Sensitivitätsanalyse.

Die Approximationsgüte eines optimalen Parametersatzes kann durch den Wert der mittleren quadratischen Abweichung zwischen den gemessenen und den berechneten Werten eingeschätzt werden. Da die durch das Fehlerquadratfunktional beschriebene Zielfunktion jedoch mehr oder weniger ausgedehnte Bereiche mit Funktionswerten nahe dem berechneten Minimum besitzt, ist die Angabe der Approximationsgüte zur Charakterisierung

der erhaltenen Lösung nicht ausreichend. Mit Hilfe der Fehlerquadratminimum-Schätzung bzw. der *Gauß-Markov*-Schätzung gelingt zusätzlich die Angabe der Kovarianzmatrix der Parameter für die Linearisierung des Modells an der Stelle des optimalen Parametersatzes. Aus der Kovarianzmatrix können Konfidenzbereiche für die einzelnen Parameter sowie die Korrelationskoeffizienten bestimmt werden.

Zur Berücksichtigung unterschiedlicher Merkmale bzw. Versuche bei der Parameteridentifikation ist die Konstruktion einer multikriteriellen Zielfunktion erforderlich. Hierfür wurden verschiedene Möglichkeiten angegeben und erprobt.

Die Bestimmung der Anfangs-Fließortkurve und damit der Anfangswerte der inneren Variablen erfolgte mit Hilfe einer linearen Approximation. Berechnungen zur Reidentifikation von Verfestigungsparametern unter Zugrundelegung synthetischer Meßwerte dienten der Überprüfung der Programme. Gleichzeitig wurden erste Erfahrungen bezüglich der Korrelationen der Parameter untereinander und des Auftretens von Konfidenzbereichen gesammelt.

Bei der Auswertung des Biegeversuchs an der gekerbten Probe ergab sich aus den Meßwerten der Verzerrungen für kernnahe Punkte in den Entlastungs-Lastschritten statt einer kontinuierlichen Entlastung eine regellose Folge von Be- und Entlastungen, welche als systematische Fehler zu interpretieren sind. Nach Streichung der betroffenen Lastschritte wurde eine zufriedenstellende Approximation der Vergleichsgrößen beobachtet. Bei Verwendung des Potenzansatzes ergibt sich eine starke Korrelation der beiden die isotrope Verfestigung beschreibenden Parameter. Dagegen ist bei Verwendung des *arctan*-Ansatzes bzw. des Exponentialansatzes die Bestimmung des die Krümmung der Fließkurve beschreibenden Parameters a_2 nicht hinreichend möglich. Bei allen drei verwendeten Ansätzen ergibt sich jedoch eine ausreichende Trennung der isotropen und der kinematischen Verfestigung.

Bei der Auswertung des Zugversuchs mit Hilfe des Potenzansatzes wurde wiederum eine starke Korrelation der Parameter der isotropen Verfestigungsfunktion beobachtet. Dagegen sind die Korrelationen zwischen den Parametern des *arctan*- sowie des Exponentialansatzes deutlich geringer. Die Trennung der isotropen und der kinematischen Verfestigungsanteile ist jedoch nicht möglich, da nur eine einsinnige Belastung vorliegt.

Erst die gleichzeitige Auswertung der Meßergebnisse beider Versuche führte auf ein befriedigendes Ergebnis der Parameteridentifikation, wobei die starke Korrelation der Parameter des Potenzansatzes erhalten bleibt. Bei Verwendung des *arctan*-Ansatzes wurde die kleinste mittlere quadratische Abweichung und damit die beste Approximation erreicht.

Während die experimentellen Ergebnisse des Biegeversuchs an der gekerbten Probe und der Zugversuche durch das verwendete Modell und die identifizierten Parameter hinreichend genau beschrieben werden, ist dies für die Spannungs-Dehnungs-Kurven aus den Biegeversuchen an geraden Proben nicht der Fall.

Liste häufig verwendeter Formelzeichen

Skalare:

a_1, a_2, a_3	Parameter der isotropen Verfestigung
b_1, b_2, b_3	Parameter der kinematischen Verfestigung
c_1, c_2, c_3	Parameter der Distorsionsverfestigung
b	Breite der Probe
E	Elastizitätsmodul
F	Fließbedingung
G	Schubmodul
h	Höhe der Probe
M	Biegemoment
N	Längskraft
n	Anzahl, z. B. Anzahl der Vergleichswerte
n_p	Anzahl der Parameter
\bar{s}	mittlere quadratische Abweichung
s^2	Schätzwert der Varianz einer Stichprobe
w_i	Wichtungsfaktor
y	berechnete Vergleichsgröße
\hat{y}	gemessene Vergleichsgröße
ε	technische Dehnung
ε_v^{pl}	plastische Vergleichsdehnung
ϵ	Meßfehler
$\dot{\lambda}$	plastischer Multiplikator
ν	Querkontraktionszahl
φ	logarithmische Dehnung
Φ	Zielfunktion
σ^2	Varianz einer Stichprobe
σ_F	Fließspannung
σ_{F_0}	Anfangsfließspannung
σ_K	Spannung im Kerbgrund
σ_M	bezogenes Biegemoment
σ_N	bezogene Längskraft

Matrizen und Tensoren:

\mathbf{E}	Elastizitätstensor vierter Stufe
\mathbf{G}	Vektor von Gleichungen
\mathbf{H}	Hessian
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{J}	Jacobian
\mathbf{N}	Distorsionstensor vierter Stufe
\mathbf{P}	Kovarianzmatrix
\mathbf{p}	Parametervektor
\mathbf{p}^*	Vektor der optimalen Parameter
\mathbf{q}	Evolutionsfunktionen der inneren Variablen
\mathbf{R}	Korrelationsmatrix

\mathbf{r}	Residuum
\mathbf{s}	Deviator des Spannungstensors
\mathbf{X}	Matrix der Funktionswerte für ein lineares Modell
\mathbf{x}	Vektor unabhängiger Größen
\mathbf{y}	Vektor der berechneten Vergleichsgrößen
$\hat{\mathbf{y}}$	Vektor der gemessenen Vergleichsgrößen
\mathbf{z}	Vektor der Zustandsgrößen des Deformationsgesetzes
$\boldsymbol{\alpha}$	Rückspannungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$	elastischer Anteil des Verzerrungstensors
$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	plastischer Anteil des Verzerrungstensors
κ	innere Variable
$\boldsymbol{\Psi}$	Kovarianzmatrix der Meßfehler
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor der <i>Cauchy</i> -Spannungen
$\boldsymbol{\Omega}$	bezogene Kovarianzmatrix

Operatoren und sonstige Symbole:

$(.)^T$	Transponierte
$(.)^{-1}$	Inverse
$(.)_o$	Anfangswert
$cov(.)$	Kovarianz eines Vektors von Zufallsvariablen
$konf(.)$	Konfidenzintervall einer Zufallsvariablen
∇	Nabla-Operator
$[\cdot]$	<i>Gaußsche</i> Summe

Literaturverzeichnis

- [1] H. Altenbach, J. Altenbach, A. Zolochovsky: *Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig/Stuttgart, 1995.
- [2] D. K. Anding: *Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze*. Diss. Ruhr-Universität Bochum, 1997.
- [3] P. J. Armstrong, C. O. Frederick: *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. General Electricity Generating Board Report No. RD/B/N/731, 1966.
- [4] G. Backhaus: *Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung*. Z. Ang. Math. Mech. 48 (1968), 99 - 108.
- [5] G. Backhaus: *Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschinger-Effektes*. Acta Mechanica 14 (1972), 13 - 42.
- [6] G. Backhaus: *Vergleich einiger Ansätze zur Erfassung der Verformungsanisotropie und eine einfache Spannungs-Verformungs-Beziehung*. Z. Ang. Math. Mech. 56 (1976), 513 - 522.
- [7] G. Backhaus: *Deformationsgesetze*. Akademie-Verlag Berlin, 1983.
- [8] A. Baltov, A. Sawczuk: *A Rule of Anisotropic Hardening*. Acta Mechanica 1/2 (1965), 81 - 92.
- [9] D. M. Bates, D. G. Watts. *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*. Wiley, New York, 1988.
- [10] J. V. Beck, K. J. Arnold: *Parameter Estimation in Engineering and Science*. Wiley, New York, 1977.
- [11] H. Bergander: *Nichtlineares und inelastisches Materialverhalten*. In: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2. Fachbuchverlag Leipzig, 1985.
- [12] D. P. Bertsekas: *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, 1995.
- [13] J. Betten: *Plastische Anisotropie und Bauschinger-Effekt; allgemeine Formulierung und Vergleich mit experimentell ermittelten Fließortkurven*. Acta Mechanica 25 (1976), 79 - 94.

- [14] J. Betten: *Application of Tensor Functions to the Formulation of Yield Criteria for Anisotropic Materials*. Int. J. Plasticity 4 (1988), 29 - 46.
- [15] J. P. Boehler (ed.): *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. Springer-Verlag Wien - New York, 1987
- [16] E. Bohnsack: *Zur Identifikation von Verfestigungsparametern elastisch-plastischer Stoffgesetze an inhomogen verformten Proben*. Diss. TU Chemnitz-Zwickau, Institut für Mechanik, Bericht 1/97, 1997.
- [17] E. Bohnsack: *Continuous Field Approximation of Experimentally Given Data by Finite Elements*. Computers & Structures 63 (1997), 1195 - 1204.
- [18] P. Bormann: *Analyse elastisch-plastischer Eigenschaften orthotroper Bleche mit Biegeversuchen*. Diss. TU Chemnitz, Institut für Mechanik, Bericht 1/99, 1999.
- [19] S. Brandt: *Datenanalyse*. BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, 3. Aufl. 1992.
- [20] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Leipzig, 1979.
- [21] V. L. Danilov: *K formulirovke zakona deformacionnogo upročnenija*. Mechanika tverdogo tela 6 (1971), 146 -150.
- [22] J. E. Dennis, R. B. Schnabel: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1983.
- [23] DIN 17440: *Nichtrostende Stähle*. Beuth Verlag Berlin 1996.
- [24] DIN 17441: *Nichtrostende Stähle*. Beuth Verlag, Berlin 1997.
- [25] D. C. Drucker: *Some implications of work hardening and ideal plasticity*. Quart. Appl. Math. 7 (1949), 411.
- [26] M. A. Eisenberg, A. Phillips: *On nonlinear kinematic hardening*. Acta Mechanica 5 (1968), 1 - 13.
- [27] EN 10088-2: *Nichtrostende Stähle*. Beuth Verlag Berlin 1995.
- [28] H. Eschenauer, W. Schnell: *Elastizitätstheorie: Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. BI-Wiss.-Verlag Mannheim, 3. Aufl. 1993.
- [29] H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell: *Applied Structural Mechanics*. Springer 1997.
- [30] P. Eykhoff: *System Identification, Parameter and State Estimation*. Wiley, New York, 1974.
- [31] T. Furukawa, G. Yagawa: *Inelastic Constitutive Parameter Identification Using an Evolutionary Algorithm with Continuous Individuals*. Int. J. Num. Meth. Engng. 40 (1997), 1071 - 1090
- [32] J.-C. Gelin, O. Ghouati: *An Inverse Method for Material Parameter Estimation in the Inelastic Range*. Computational Mechanics 16 (1995), 143-150.

- [33] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright: *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [34] H. Göldner u. a. *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2*. Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 3. Aufl. 1992
- [35] U.-J. Görke: *Unveröffentlichte Mitteilung*.
- [36] U.-J. Görke, R. Kreißig: *Einflußfaktoren bei der Identifikation von Materialparametern elastisch-plastischer Deformationsgesetze aus inhomogenen Verschiebungsfeldern*. TU Chemnitz-Zwickau, Preprint SFB 393/97-04, 1997.
- [37] G. Grewolls: *Numerische Untersuchungen zur anisotropen plastischen Verfestigung unter besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse in gewalzten Blechen*. Diss. TU Chemnitz 1998, Institut für Mechanik, Bericht 1/98.
- [38] Ch. Großmann, J. Terno: *Numerik der Optimierung*. B. G. Teubner, Stuttgart 1993.
- [39] S. Hartmann, G. Lührs, P. Haupt: *An Efficient Stress Algorithm with Applications in Viscoplasticity and Plasticity*. Int. J. Num. Meth. Engng. 40 (1997), 991 - 1013.
- [40] H. Ishikawa: *Subsequent yield surface probed from its current center*. Int. J. Plasticity 13 (1997), 533 - 549.
- [41] H. Ishikawa, K. Sasaki: *Deformation induced anisotropy and memorized back stress in constitutive model*. Int. J. Plasticity 14 (1998), 627 - 646.
- [42] R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press Oxford, 1950.
- [43] M. Kleiber: *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. Wiley, Chichester, 1997.
- [44] R. Kreißig: *Einführung in die Plastizitätstheorie: Mit technischen Anwendungen*. Fachbuchverlag Leipzig/Köln, 1992.
- [45] R. Kreißig, J. Naumann: *Identifikation elastisch-plastischer Deformationsgesetze mit Hilfe des Moiréverfahrens*. Arbeits- und Ergebnisbericht 1992 - 1993, Teilprojekt A 12, SFB 319.
- [46] R. Kreißig, J. Naumann, U. Benedix, P. Bormann, G. Grewolls, S. Kretzschmar: *Parameter Identification of Inelastic Deformation Laws Analysing Inhomogeneous Stress-Strain States*. TU Braunschweig, Abschlußbericht SFB 319, 1996/1997.
- [47] S. Kretzschmar: *Parameteridentifikation elastisch-plastischer Deformationsgesetze durch Anpassung numerischer an experimentell ermittelte Verschiebungsfelder*. Diss. TU Chemnitz, Institut für Mechanik, Bericht 3/98, 1998.
- [48] Th. Lehmann: *Anisotrope plastische Formänderungen*. Rheologica Acta 3 (1964), 281 - 285.
- [49] K. Levenberg: *A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares*. Quart. Applied Mathematics 2 (1944), 164 - 168.

- [50] R. Mahnken: *Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik*. Diss. Universität Hannover, in: IBNM-Bericht 92/3, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1992.
- [51] R. Mahnken, E. Stein: *The Parameter-Identification for Visco-Plastic Models via Finite-Element-Methods and Gradient-Methods*. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 2 (1994), 597 - 616.
- [52] R. Mahnken, E. Stein: *Parameter Identification for Viscoplastic Models Based on Analytical Derivatives of a Least-Squares Functional and Stability Investigations*. Int. J. Plasticity 12 (1996), 451 - 479.
- [53] R. Mahnken: *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation bei metallischen Werkstoffen*. Habilitationsschrift Universität Hannover, 1996. In: Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht-Nr. F 98/2, 1998.
- [54] D. W. Marquardt: *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*. SIAM J. Applied Mathematics 11 (1963), 431 - 441.
- [55] M. H. H. Meuwissen: *An Inverse Method for the Mechanical Characterisation of Metals*. Ph. D. thesis TU Eindhoven, 1998.
- [56] D. Michael, A. Meyer: *Some remarks on the simulation of elasto-plastic problems on parallel computers*. TU Chemnitz-Zwickau, Preprint SPC 95-13, 1995.
- [57] R. v. Mises: *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*. Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., Göttingen, 1913, 582 - 592.
- [58] R. v. Mises: *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*. Z. Ang. Math. Mech. 8 (1928), 161 - 185.
- [59] J. C. Moosbrugger, D. J. Morrison: *Nonlinear kinematic hardening rule parameters - direct determination from completely reversed proportional cycling*. Int. J. Plasticity 13 (1997), 633 - 668.
- [60] D. Müller, G. Hartmann: *Identification of Materials Parameters for Inelastic Constitutive Models Using Principles of Biologic Evolution*. Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn. 111 (1989), 299 - 305.
- [61] J. Naumann: *Grundlagen und Anwendungen des In-plane-Moiréverfahrens in der experimentellen Festkörpermechanik*. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18, Band 110, VDI-Verlag Düsseldorf, 1992.
- [62] F. Pokropp: *Lineare Regression und Varianzanalyse*. Oldenbourg Verlag, München 1994.
- [63] W. Prager: *The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements*. Proc. Inst. Mech. Eng. 169 (1955), 41 - 57.
- [64] S. S. Rao: *Engineering Optimization: Theory and Practice*. Wiley, New York, 3. ed. 1996.

- [65] M. Sayir: *Zur Fließbedingung der Plastizitätstheorie*. Ingenieur-Archiv 39 (1970), 414 - 432.
- [66] H. Schwetlick, H. Kretzschmar: *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig, 1991.
- [67] G. A. F. Seber and C. J. Wild: *Nonlinear Regression*. Wiley, New York, 1989.
- [68] T. Seibert: *Simulationstechniken zur Untersuchung der Streuungen bei der Identifikation der Parameter inelastischer Werkstoffmodelle*. Diss. TH Darmstadt 1996, Shaker Verlag, Aachen, 1997.
- [69] M. Sester: *Fortschrittliche Werkstoffmodelle im Rahmen der Kontinuumsmechanik*. Diss. TH Darmstadt, 1995.
- [70] W. A. Spitzig, R. J. Sober, O. Richmond: *Pressure Dependence of Yielding and Associated Volume Expansion in Tempered Martensite*. Acta Metallurgica 23 (1975), 885-893.
- [71] T. Streilein: *Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen*. Diss. TU Braunschweig. Bericht Nr. 97 - 83, Inst. für Statik der TU Braunschweig, 1997.
- [72] F. Thielecke. *Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendungen -*. Dissertation TU Braunschweig 1997. In: Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 34 - 1998.
- [73] A. Troost, J. Betten: *Zur Frage der Konvexität von Fließbedingungen bei plastischer Inkompressibilität und Kompressibilität*. Mechanics Research Communications 1 (1974), 73 - 78.
- [74] V. Ulbricht, H. Röhle: *Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten*. Dissertation, TU Dresden, Fakultät für Maschinenwesen, 1975.
- [75] K. Wegener, M. Schlegel: *Suitability of Yield Functions for the Approximation of Subsequent Yield Surfaces*. Int. J. Plasticity 12 (1996), 1151 - 1177.